Schriftliche Hausarbeit zur Abschlussprüfung der erweiterten Studien für Lehrer im Fach Informatik

VII. Weiterbildungskurs Informatik
in Zusammenarbeit mit der Fernuniversität Hagen

Eingereicht dem Amt für Lehrerausbildung - Außenstelle Gießen -

Vorsitzender des Prüfungsausschusses: Jungermann

Die Wurzeln der Theoretischen Informatik in der Mathematik

Ein Überblick über die Entwicklung der Theoretischen Informatik anhand bedeutender Wegbereiter zu Beginn des 20. Jahrhunderts

Verfasser : Thomas Wolf

Hainhäuser Str. 64
63110 Rodgau

tätig am Alten Kurfürstlichen Gymnasium, Bensheim

im August 2003

Gutachter : Gerhard Röhner

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Die Situation der Mathematik und ihre Verbindung zu Grundfragen der Theoretischen Informatik **3**
2.1 Der Weg bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts . . . 3
2.2 Die Hilbertschen Probleme . . . 6
2.3 Das Cantorsche Diagonalisierungsverfahren . . . 8
2.4 Die Frage nach der Berechenbarkeit . . . 10
2.5 Das Halteproblem . . . 10

3 Kurt Gödel **11**
3.1 Biographie . . . 11
3.2 Die Unvollständigkeitssätze . . . 13

4 Alan Turing **17**
4.1 Biographie . . . 17
4.2 Die Turing-Maschine . . . 19
4.3 Der Turing-Test . . . 24

5 Emil Post **24**

6 Alonzo Church **25**
6.1 Kurzbiographie . . . 25
6.2 Das λ-Kalkül . . . 25
6.3 Die Churchsche These . . . 26

7 John von Neumann **27**
7.1 Biographie . . . 28
7.2 Die Entwicklung des „Von-Neumann“-Computers . . . 30

8 Princeton **33**

9 John Backus **35**

10 Noam Chomsky **37**
10.1 Biographie . . . 37
10.2 Die Chomsky-Hierarchie . . . 38

11 Michael Rabin **41**

12 Resümee **42**

13 Literaturverzeichnis **44**

1 Einleitung

Jeder, der sich in seinem Leben auf das Wagnis des Programmierens von Computern eingelassen hat, kennt die Fragen:

„Wird mein Programm auch das machen, was ich von ihm erwarte?“
„Hält mein Programm überhaupt jemals an?“
„Ist ein Programm, wie ich es will, möglich?“
„Wieviel Ressourcen (Platz, Zeit, Prozessoren, Fläche) benötigt es?“

Die Grundfragen der Theoretischen Informatik, von denen es noch weitere gibt, sind somit überaus praxisrelevant. Für eine Antwort auf diese Fragen würde jeder Programmierer viel geben. Es ist ein Ziel der Theoretischen Informatik zu erklären, warum diese Fragen aber nicht so einfach, das heißt nicht algorithmisch, lösbar sind.
In den Schulunterricht hat die Theoretische Informatik schon seit längerer Zeit Einzug gehalten. Im Lehrplan des Landes Hessen wird sie für die Jahrgangsstufe 13 verbindlich vorgeschrieben (siehe [HKM]). Zu diesem Zeitpunkt besitzen die Schülerinnen und Schüler genügend Programmiererfahrung, um den Wert der Automatentheorie zusammen mit den Formalen Sprachen, der Berechenbarkeits- und Komplexitätstheorie für ihre eigene Arbeit zu erkennen.
Lehrbücher für die Theoretische Informatik gibt es reichlich. Die bildende Wirkung, die einige fachlich überaus fundierte Bücher auf einen interessierten, aber unvorbereiteten Leser haben können, sind höchst unterschiedlich. In vielen Lehrbüchern überwiegen formal korrekte Beweise vor der Darstellung der Ideen der Sätze und Beweise. Die wesentlichen Kerngedanken von technischen oder formalen Details zu trennen, ist weitaus schwieriger als formale Beweise hinzuschreiben. Subjektive Entscheidungen müssen dafür getroffen werden und es besteht immer die Gefahr, so sehr zu vereinfachen, dass ihre Darstellung falsch wird. In [Schöning], [Hedtstück] und [Wegener] habe ich dagegen verständliche Einführungen gefunden, die mir aber auch für den Schulunterricht hilfreich waren.
Didaktische Zugänge zur Theoretischen Informatik werden in den Fachbüchern, zum Beispiel in [Baumann93] und [Baumann96], sowie Fachzeitschriften, beispielsweise in LOG IN [Breier89], [Breier90], [Breier91] und [Kerner], vorgestellt. Auch auf dem hessischen Bildungsserver (http://www.bildung.hessen.de) sind Kursvorschläge und Materialien zur Verfügung gestellt.
Beim Lesen des Lehrplans oder der Inhaltsverzeichnisse der Bücher und Zeitschriften tauchen eine Reihe von Begriffen auf, die ihre Namen durch ihre Entwickler oder Entdecker erhalten haben: Von der allgegenwärtigen Turing-Maschine[1], über die Churchsche These, die von-Neumann-Architektur und der Chomsky-Hierarchie bis zur Backus-Naur-Form. Weitere Informationen über die Namensgeben fehlen meist, doch vielfach findet sich der Hinweis, dass einige der gundlegenden Erkenntnisse der Theoretischen Informatik noch vor Beginn der Computer-Ära gewonnen wurden. Dies erstaunt, denn die Theoretische Informatik, die „sich mit der Leistungsfähigkeit, den prinzipiellen Möglichkeiten und den Grenzen informationsverarbeitender Maschinen sowie der Grenze der Problemlösung mit Algorithmen“ ([HKM] S. 18) auseinandersetzt, verlangt doch, nach intuitivem Verständnis, die Existenz und auch die Erfahrung im Umgang mit Computern. Beschäftigt man sich näher mit dem Modell der Turing-Maschine, könnte die Frage auftauchen: „Was bringt einen Menschen wie Turing dazu, sich ein vereinfachtes Modell auszudenken, für etwas, was nicht existiert?“.

[1] In der Literatur findet sich auch die Schreibweise „Turingmaschine“.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Überblick über die Entstehung grundlegender Theorien und Modelle der Theoretischen Informatik, also ihren historischen Wurzeln, zu geben. Da wichtige Entwicklungen immer von einzelnen Menschen gemacht werden, stehen dabei insbesondere die jeweiligen Personen im Blickpunkt. Über die Biographien der Menschen soll versucht werden, ihre Arbeit nachvollziehbar werden zu lassen.
So wichtig ein Überblick für das eigene Verständnis ist, so viele Gefahren lauern in einem solchen Unterfangen:

- Die Entwicklung der Theoretischen Informatik vollzog sich in wenigen Jahrzehnten. Dies war nur möglich, weil sich eine Vielzahl von Wissenschaftlern daran beteiligte. Alle Beiträge zu berücksichtigen ist daher in diesem Rahmen unmöglich.

- Die beteiligten Menschen waren überaus vielfältig und eine stark zusammengefasste Darstellung kann ihnen kaum gerecht werden.

- Die grundlegenden Arbeiten sind komplex und eine verkürzte Darstellung lässt Schwierigkeiten und deren geniale Lösung nur sehr schwer im richtigen Licht erscheinen.

- Die Entwicklung in diesem Bereich hat in den letzten Jahrzehnten an Geschwindigkeiten zugenommen. Eine einheitliche Darstellung der gesamten Theorie erfordert einen enormen Wissensfundus.

Diese Arbeit kann deshalb keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben und befasst sich nur mit den historischen Anfängen. Sowohl die Auswahl der vorgestellten Persönlichkeiten als auch die Gewichtung ihre Beiträge sind subjektiv. Die Arbeit kann demnach maximal einen Einstieg in die Fragestellungen und Hinweise auf weiterführende Literatur bieten. Die Biographien und die Würdigung der Arbeit jedes einzelnen sind notwendigerweise verkürzt und damit nicht umfassend genug, um jedem gerecht zu werden. Trotzdem enthalten die Biographien Details, die meines Erachtens etwas von den Eigenarten der Personen verraten. Der Blick auf die Arbeit eines Wissenschaftlers wird somit um persönliche Komponenten und gesellschaftliche Hintergründe erweitert, was einzelne Vorgehensweisen besser verstehen lässt. Das Gesamtverständnis für Zusammenhänge wird dadurch erleichtert.
Trotz aller Schwierigkeiten und Probleme ist ein solcher Überblick notwendig für ein zusammenhängendes Verständnis der Theoretischen Informatik. Eine Zusammenfassung über die gesamte Entwicklung der Informatik findet sich bereits in [Baumann96]. Gerade für Lehrer, die sich viele Inhalte autodidaktisch erarbeiten müssen, soll diese Arbeit eine weitere Unterstützung darstellen. Dabei ist es nicht als didaktisches Konzept für den Unterrichtseinsatz konzipiert. Vielmehr soll es das eigene Hintergrundwissen verbreitern und die Mathematik mit der Informatik verbinden. Aber da auch Schülerinnen und Schüler an Zusammenhängen und kleinen Anekdoten interessiert sind, kann und sollte das so gewonnene Wissen an den passenden Stellen im Unterricht eingearbeitet werden. Motiviert wird dies auch durch den Verweis des Lehrplans auf die Bedeutung gesellschaftlicher, historischer und philosophischer Fragestellungen (siehe [HKM] S. 3). Die mathematischen Voraussetzungen in der Jahrgangsstufe 13 sind soweit gelegt, dass die Schülerinnen und Schüler die Probleme und Kernideen der Lösungen nachvollziehend verstehen können.
Für die Theoretische Informatik spielt dabei die Mathematik eine zentrale Rolle. Insbesondere die Hilbertschen Probleme müssen in der Entwicklung und der Situation der Mathematik erläutert werden. Der Schwerpunkt dieser Abhandlung liegt in der Darstellung der Arbeiten von Kurt Gödel, Alan Turing und John von Neumann. Die Auswahl der

Wissenschaftler erfolgte einerseits aus der Bedeutung ihrer Arbeit andererseits aus dem Bekanntheitsgrad der nach ihnen benannten Sätze oder Entwicklungen. Dabei können allerdings nur die Ideen ihrer Arbeiten skizziert werden. Auch die Beweise sind nicht vollständig, sondern in groben Zügen skizziert.
Die Wechselwirkung dieser Arbeiten mit philosophischen Fragestellungen wird nur in wenigen Punkten angeschnitten. Insbesondere auf Ludwig Wittgenstein (1889-1951) wäre in diesem Zusammenhang einzugehen. Sein *„Tractatus“* sollte, mit den Mitteln der Logik, der Sprache eine Grenze setzen. „Was jenseits der Grenzen liegt, wird einfach Unsinn sein“ ([Guerrerio] S. 15). Er lieferte einen Beitrag für den Wiener Kreis, in dem sich unterschiedliche Persönlichkeiten trafen. Auf den Wiener Kreis könnte sehr viel umfangreicher eingegangen werden.
Alle hier aufgeführten Wissenschaftler interessierten sich für Philosophie und die philosopischen Konsequenzen ihrer Erkenntisse. Gödel gehörte über eine längere Zeit zum Wiener Kreis. Auch Turing besuchte Wittgensteins Seminare und diskutierte intensiv mit ihm. John von Neumann wurde von John Dorling, einem Philosophieprofessor der Universität von Amsterdam, als einen der größten Philosophen des 20. Jahrhunderts bezeichnet:

> „Auf etwa sechs Gebieten der Philosophie leistete von Neumann sehr wesentliche Beiträge. . . er verwandelte vage Probleme in solche, die sich präzise mathematisch formulieren ließen. Kein bekannter Philosoph hat in diesem Jahrhundert einen ähnlichen Beitrag auf so vielen Gebieten geleistet“[2].

Dem interessierten Leser seien somit einige Stichpunkte genannt, an denen sich tiefergehende Studien orientieren könnten.

2 Die Situation der Mathematik und ihre Verbindung zu Grundfragen der Theoretischen Informatik

2.1 Der Weg bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts

Die vorherrschende Disziplin der Mathematik im 19. Jahrhundert war die Analysis. Ihre Erfolge in Naturwissenschaft und Technik eröffneten beeindruckende Möglichkeiten. Innerhalb der Astronomie konnte Gauß (1777 - 1855) die Bahnen von Planetoiden vorhersagen und die Entwicklung des Telegraphenapparates durch Gauß und Weber im Jahre 1833 brachte immer mehr Menschen zu der Überzeugung, die von Hugo Steinhaus (1887-1972) bekannt wurde: *„Der Mathematiker macht's einfach besser.“* (aus [Kordos], S. 223).
Doch die Erfolge der Analysis standen lange im Widerspruch zu dem logischen Fundament ihrer Begründung. Erst Louis Cauchy (1789 - 1857) begann damit, indem er die Begriffe der Stetigkeit und des Grenzwertes reeller und komplexer Funktionenfolgen und -reihen einführte. Die strenge Fundierung wurde von Bernhard Riemann (1826-1866) und Carl Weierstraß (1815 - 1897) fortgesetzt, wobei letzter die Symbole ϵ und δ einführte. Weierstraß war es auch, der alle Probleme auf die Behandlung von Ungleichungen mit Beträgen reeller Zahlen zurückführte und damit die „Arithmetisierung“ der Analysis begründete.
Die Fourier-Reihen waren eine leicht handhabbare Darstellung rechnerisch oder experimentell gewonnener Funktionen. Aber lässt sich jede Funktion in eine Fourier-Reihe entwickeln? Und ist diese Reihenentwicklung eindeutig? Diese Fragen gaben, verkürzt

[2] aus [Macrae] S. 31.

dargestellt, den Impuls für die Entwicklung der Mengenlehre, einer neuen mathematischen Disziplin. Die exakten Antworten auf viele Fragen mussten eindeutig formuliert werden und erforderten eine neue Sprache, die der Mengenlehre. Diese stellte eine neue Methode zur Verfügung, wie man die Anzahl der Elemente, ihre Mächtigkeit, bestimmt. Zwei Mengen haben dann gleich viele Elemente, wenn jedem Element aus der einen Menge genau ein Element aus der zweiten Menge zugeordnet werden kann. Mit endlichen Menge, ist diese Definition über den Begriff der Zuordnung sofort klar. Interessanter wird es, wenn man die natürlichen Zahlen (1,2,3,...) mit den ganzen Zahlen (..., -2, -1, 0, 1, 2,...) vergleicht und feststellt, dass diese entgegen der ersten Intuition, gleichviel Elemente enthalten[3]. Die Anzahl der Elemente bezeichnete man mit $\aleph$. Noch interessanter war die Frage, ob die rationalen Zahlen (alle Zahlen, die sich als Brüche darstellen lassen) mehr Elemente enthalten als die natürlichen Zahlen. Erstaunlicherweise sind auch diese beiden Zahlenmengen gleichmächtig[4].
Die Menge aller reellen Zahlen (alle Zahlen, die sich als Dezimalzahlen mit endlich oder unendlich vielen Stellen darstellen lassen) kam ins Zentrum der Untersuchungen. Viele Fragen entwickelten ein Eigenleben, deren Beantwortung wichtige Konsequenzen nach sich zogen. So die Frage, ob sich reelle Zahlen in einer Folge anordnen lassen. Die positive Antwort würde die Abzählbarkeit der reellen Zahlen zur Folge haben. Damit wäre die Menge der reellen Zahlen so groß wie die Menge der natürlichen Zahlen. Georg Cantor (1845 - 1918) beantwortete die Frage mit „nein“. Seine Intention war zunächst, einen einfachen Beweis für die Existenz und die Anzahl (ihre Kardinalität) transzendenter Zahlen zu erhalten. In der Beweisführung verwendete er ein Diagonalisierungsverfahren, welches sich in der Theoretischen Informatik immer wieder findet. Deswegen wird die Idee in Abschnitt 2.3 nochmals dargestellt.
Mit diesem Beweis begannen die Überlegungen, das zu erfassen und zu strukurieren, was allgemein unter „unendlich“ verstanden wird. Cantor bewies weiterhin, dass ein Intervall auf der reellen Zahlengrade „gleichviele“ Punkte hat wie ein Quadrat oder ein Würfel. Damit war der Begriff der Dimension infrage gestellt. Das Unendliche als etwas tatsächlich vorhandenes anzusehen, war unter den Mathematikern keineswegs unumstritten. Schon Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) schrieb 1831: „So protestiere ich gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer vollendeten, welches in der Mathematik niemals erlaubt ist.“(aus [Guerrerio] S. 25). Cantors ehemaliger Lehrer Leopold Kronecker lehnte das Un-

[3]Das lässt sich über folgende Eins-zu-Eins-Zuordnung verstehen:

natürliche Zahlen		ganze Zahlen
1	$\leftrightarrow$	0
2	$\leftrightarrow$	-1
3	$\leftrightarrow$	1
4	$\leftrightarrow$	-2
5	$\leftrightarrow$	2
.	.	.
.	.	.
2n	$\leftrightarrow$	-n
2n+1	$\leftrightarrow$	n

Jede natürliche Zahl kommt genau einmal in der linken Spalte vor und jede ganze Zahl kommt genau einmal in der rechten Spalte vor. Demzufolge ist jedem Element aus der einen Menge genau ein Element aus der zweiten Menge zugeordnet und die beiden Mengen sind gleichmächtig.

[4]Der Beweis wird in vielen Büchern, wie [LS] S. 356, mit Hilfe einer Tabelle gemacht. Alternativ kann auch die Zuordnung $\frac{x}{y} \rightarrow \binom{x+y+1}{2} + x$ verwendet werden. Sie ordnet jedem Bruch eine unterschiedliche natürliche Zahl zu (aus [Schöning] S. 111).

endliche ebenfalls ab, wobei er gesagt haben soll: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“ ([Guerrerio] S. 27). „Gott“ war hier allerdings nicht theologisch, sondern im Sinne einer objektiven Wahrheit zu verstehen.
Nachdem klar war, dass das Unendliche eine Struktur hat, sollte diese untersucht werden[5]. Der Begriff der Teilmenge spielt eine zentrale Rolle. Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen (- da jedes Element zu einer Teilmenge dazu gehören kann, oder nicht). Die Anzahl der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ wurde mit $\aleph$ symbolisiert, und Cantor vermutete, dass die Anzahl der Teilmengen von $\mathbb{N}$, also $2^{\aleph}$ gleich ist mit der Anzahl der reellen Zahlen. Mit $\aleph_1$ bezeichnete man die nächst größere überabzählbare Ordinalzahl, die Anzahl der reellen Zahlen wurden mit c abgekürzt. Die von Cantor gestellte Frage lautete: *Gibt es Mengen, die mehr Elemente enthalten als die natürlichen Zahlen, aber weniger Elemente als die Menge der reellen Zahlen?:* $c = \aleph_1$ (Kontinuumshypothese, 1884). Die Bedeutung der Frage wuchs in dem Maße, wie die Mengenlehre immer mehr zur universellen Sprache der Mathematik wurde.
Dem Begriff der Menge muss an dieser Stelle noch mehr Aufmerksamkeit gewidmet werden. Die Vorstellung, eine Menge sei eine Ansammlung von Objekten, reicht für mathematisches Arbeiten nicht aus. Das berühmte Russellsche Paradoxon, der *“Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten“*, ist das klassische Beispiel für Probleme, die beim Arbeiten mit Mengen entstehen können[6]. Die Anwendung der Mengenlehre auf weitere Gebiete ließ neue Paradoxien entstehen. Die Notwendigkeit einer Axiomatisierung war nicht mehr zu leugnen. Unter der Axiomatisierung versteht man dabei eine Übereinkunft, wie eine Menge durch explizite Angabe ihrer Grundeigenschaften zu beschreiben ist. Ist diese Axiomatisierung widerspruchsfrei (konsistent) und umfassend (vollständig), kann jeder Aussage eindeutig ein Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ zugewiesen werden. 1908 gelang es Ernst Zermelo (1871 - 1953) ein befriedigendes Axiomensystem für die Mengenlehre vorzulegen.
Für den Kernbereich der Arithmetik legte Guiseppe Peano (1858 - 1932) in seinem Buch *„Arithmetices Principia nova methodo exposita“* von 1889 ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen vor.

Das mathematisch gesicherte Wissen entwickelte sich in immer schnellerem Maße, gleichzeitig gingen die Erkenntnisse in unterschiedliche Richtungen. Die Versuche zur Vereinheitlichung ließen die Anzahl der Gebiete, auf denen zu forschen war, immer weiter vergrößern. Die Sorge um den Zusammenhalt der Mathematik verschärfte sich bishin zur Sorge um die Rechtfertigung ihrer Existenz. Die Suche nach einem Mindestmaß von Ordnung wurde immer drängender. Das Erlanger Programm von Felix Klein (1849 - 1925) und das Programm von David Hilbert (1862 - 1943), das eigentlich von Moritz Pasch konzipiert wurde, sollten Lösungen aufzeigen. Klein forderte eine Konzentration auf die mathematischen Objekte, während Hilbert für eine axiomatisch begründete Theorie der ganzen Mathematik plädierte. Hilberts Haltung setzte sich im Laufe der Zeit durch.
Der erste Mathematikerkongress 1894 in Zürich bestätigte die schlimmsten Befürchtun-

[5]Dieses Problem wurde von Hilbert in dem bekannten Ausspruch „Aus dem Paradis, das Cantor uns geschaffen, soll niemand uns vertreiben“ zusammengefasst. Es bestand die Aufgabe in einer „endgültigen Klärung des Wesens des Unendlichen ... eine Notwendigkeit angesichts der Würde des menschlichen Verstandes“ ([Guerrerio] S. 38).

[6]Bekannter ist diese Antinomie in der Fassung, die Russel 1918 vorgelegt hat: Der Dorfbarbier ist definiert als derjenige Dorfbewohner, der genau die rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert der Barbier sich selbst? Angenommen er rasiert sich nicht selbst, dann rasiert ihn der Dorfbarbier, also rasiert er sich doch selbst. Rasiert ihn aber der Dorfbarbier, er sich also selbst, dann rasiert ihn der Dorfbarbier nicht... (Eine detaillierte Diskussion findet sich in [Guerrerio] S. 30).

gen. Die etwa einhundert Fachleute aus unterschiedlichen Nationen konnten sich nicht verständigen, obwohl alle des Französischen mächtig waren. Die einzige konsenzfähige Entscheidung war der Entschluss, ein weiteres, besser vorbereitetes Treffen 1900 in Paris abzuhalten, dessen Vorsitz Jules Henri Poincaré (1858 - 1932) übernehmen sollte.

2.2 Die Hilbertschen Probleme

Vom 6. bis 12. August 1900 fand in Paris der 2. Internationale Mathematikerkongress statt, an dem 226 Mathematiker aus 23 Ländern von 5 verschiedenen Kontinenten teilnahmen. Ziel war es eine Übersicht über den Stand des mathematischen Wissens zu schaffen und einige Schritte zur Systematisierung des Informationsaustausches voranzutreiben. Am 8. August hielt David Hilbert einen Vortrag unter dem Titel *„Mathematische Probleme“* (abgedruckt in [Hilbert]), der das nachhaltigste Ereignis des gesamten Kongresses darstellten sollte, sowohl aus damaliger als auch aus heutiger Sicht. Hilbert war Professor in Göttingen und für seine Forschungserfolge und Vielseitigkeit bekannt. Er war einerseits überzeugt, dass die Mathematik ihre Einheit nicht verlieren werde, und andererseits, dass sich die Mathematik auf soliden unangreifbaren Grundlagen aufbauen lässt. Seinem Vortrag stellte er voraus, dass die Lösung spezieller Fragen und Probleme stets die Mathematik vorangetrieben habe. Seine Einleitung endete mit den Worten ([Hilbert] S. 34):

> „Diese Überzeugung der Lösbarkeit jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit. Wir hören in uns den steten Ruf: „Das ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; „ denn *in der Mathematik gibt es keinen Ignorabismus“* (kein „Wir werden niemals wissen“)“.

Von den vorgelegten Problemen konnten einige direkt von den Zuhörern beantwortet werden, doch der Kongressbericht nennt 23 offene Punkte, von denen Hilbert glaubte, dass sie im beginnenden Jahrhundert die Mathematik inspirieren würden[7].
Insbesondere das zweite und das zehnte Hilbertsche Problem sind im Zusammenhang dieser Arbeit interessant: Das zweite Problem ist die Frage nach der Widerspruchsfreiheit der Axiome der Arithmetik, also der Peanoaxiome ([Hilbert]).

> „Unter den zahlreichen Fragen, welche hinsichtlich der Axiome zu stellen sind, ist dies als das wichtigste Problem zu bezeichnen, zu beweisen, dass dieselben mittels einer endlichen Zahl logischer Schlüsse niemals zu Resultaten gelangen kann, die miteinander in Widersprüchen stehen.“

Das zweite Problem wurde zum Ansatzpunkt all jener, die die Mathematik auf solide axiomatische Grundlagen stellen wollten. Hilbert versuchte in seiner Begründung das Unendliche zu vermeiden, da der Gebrauch, wie oben dargelegt, umstritten war. Außerdem lag dem Widerspruchsbeweis das „Prinzip des ausgeschlossenen Dritten“ zugrunde. Dieses besagt, dass eine Aussage A wahr oder falsch ist. Ist sie aber falsch, dann ist das Gegenteil wahr. Eine dritte Möglichkeit existiert nicht. Aber auch dieses Axiom war umstritten. Gödel bewies, dass die Lösung der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik unmöglich mit den Mitteln Hilberts zu erreichen ist (siehe Abschnitt 3.2). 1933 zeigte Gödel, dass die Arithmetik mit dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten (also die klassische Arithmetik) widerspruchsfrei ist, wenn die Arithmetik ohne dieses Prinzip widerspruchsfrei ist.
Das zehnte Problem bezieht sich auf eine Methode zur Lösung diophantischer Gleichungen. Eine diophantische Gleichung ist eine Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten,

[7] Eine Zusammenstellung und Diskussion findet sich in [Kordos] S. 243ff und in [Hilbert].

für die ganzzahlige Lösungen gesucht werden[8].
Es war nach einer Methode, also einem Algorithmus, gesucht. Als Hilbert dieses Problem formulierte, konnten Zweifel daran, ob ein solches Verfahren exisiert, noch nicht aufkommen, da der Algorithmusbegriff noch nicht entstanden war. Erst durch Turing und Church wurden unlösbare algorithmische Probleme gefunden[9]. Das Problem gewann erheblich an Bedeutung, als Algorithmen, berechenbare Funktionen und rekursive Methoden in die Mathematik Eingang fanden (Church, Turing). Es gibt eine gewisse Verwandtschaft zwischen dem zweiten und dem zehnten Hilbertschen Problem. Bei den arithmetischen Formeln bauen sich die Terme durch Konstanten und Variablen mittels Addition und Multiplikation auf. Es entsteht ein Polynom (z.B. $x^2 + 4x - 5$). Diese Terme (z.B. p_1 und p_2) werden in Gleichungen zu Formeln ($p_1 = p_2$), die sich zu Gleichungen umformen lassen, bei denen eine Seite Null ist ($p_1 - p_2 = 0$). Formeln können durch logische Zeichen wie $\neg, \vee$ und $\wedge$ verknüpft werden, wie beispielsweise in der Aussage $(p_1 = 0) \vee (p_2 = 0)$ in $p_1 \cdot p_2 = 0$. Enthalten arithmetische Formeln keine Quantoren oder Negationszeichen, können Sie äquivalent in eine einzelne Polynomgleichung umgeformt werden. Dies entspricht dem zehnten Hilbertschen Problem[10]. Als Computer zum Einsatz kamen, wurde die Suche nach Lösungsalgorithmen nochmals intensiviert. Aber erst 1970 fand Jurij Matijasevic, nach den Vorarbeiten zahlreicher anderer Mathematiker, den Beweis für die Unlösbarkeit des Problems.

Für die notwendige Strenge bei der Mathematisierung ist die Logik Grundlage aller Argumente. Gödel charakterisierte sie und ihre Entwicklung 1944 so ([Guerrerio] S. 31):

> „Die Mathematische Logik, die nichts anderes ist als eine präzise und vollständige Formulierung der formalen Logik, hat zwei ganz unterschiedliche Aspekte. Auf der einen Seite ist sie ein Abschnitt der Mathematik, der statt von Zahlen, Funktionen, geometrischen Figuren usw. von Klassen, Relationen, Kombinationen von Symbolen usw. handelt. Auf der anderen Seite ist sie eine allen anderen vorausgehende Wissenschaft, welche die Ideen und Prinzipien enthält, die sämtlichen Wissenschaften zugrunde liegen. In diesem zweiten Sinne ist die Mathematische Logik erstmals von Leibniz in seiner *Charactersitica universalis* aufgefasst worden, von der sie einen zentralen Teil gebildet haben würde. Doch es vergingen beinahe zweihundert Jahre nach seinem Tod, ehe seine Idee eines logischen Kalküls, der für die in den exakten Wissenschaften vorkommende Art des Schließens wirklich hinreicht, durch Frege und Peano (zumindest in irgendeiner Form, wenn auch nicht in der, die Leibniz im Sinn hatte) ins Werk gesetzt wurde. Frege war hauptsächlich an der Analyse des Gedankens interessiert und gebrauchte sein Kalkül an erster Stelle, um die Arithmetik aus der reinen Logik abzuleiten. Peano andererseits war mehr an seinen Anwendungen innerhalb der Mathematik interessiert und schuf einen eleganten und flexiblen Symbolismus, der es gestattet, selbst die kompliziertesten mathematischen Theoreme in einer vollkommen präzisen und oft sehr knappen Weise durch einzelne Formeln auszudrücken. ... Es war diese Gedankenlinie von Frege und Peano, auf der Russells Arbeit einsetzte. ... Erst in den *Principia Mathematica* wurde voller Gebrauch von der neuen Methode gemacht, um tatsächlich große Teile der Mathematik aus sehr wenigen logischen Konzepten und Axiomen abzuleiten.“

Gödel bezog sich auf das Buch *Principia Mathematica*, welches Alfred North Whitehead zusammen mit Bertrand Russell verfasste und das 1910 erschienen. Der Wunsch, die

[8] Der große Satz von Fermat ist das wohl berühmteste Beispiel für eine diophantische Gleichung.
[9] Eine Darstellung des Algorithmusbegriffs findet sich in [Ziegenbalg].
[10] Eine detailliertere Skizzierung findet sich in [Schöning] S. 150.

Mathematik auf eine logisch sichere Basis aufzubauen, ließ sie die Arithmetik als einen Teil der Logik darstellen. Das monumentale Werk verfeinerte Freges Ansätze aus seiner Arbeit *Grundgesetze der Arithmetik* von 1893 und 1903. Damit es die von Russell aufgezeite Antinomie von Seite 5 vermeidete, enthielt es ein Unendlichkeitsaxiom (Es gibt unendlich viele Gegenstände auf der Welt, [Guerrerio] S. 15), das entgegen der eigentlichen Intention nicht aus der Logik ableitbar war.

2.3 Das Cantorsche Diagonalisierungsverfahren

Der Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen wird über einen Widerspruch geführt (*reductio ad absurdum*). Aus einer Annahme wird versucht eine Folgerung zu erzeugen, die der Voraussetzung (oder allgemein irgendeiner bekanntermaßen richtigen Aussage) widerspricht. Daraus folgt, dass die Annahme falsch und ihr Gegenteil richtig ist.
Das Ziel Cantors ist die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zu zeigen. *Überabzählbar* bedeutet, dass es kein Verfahren oder Vorgehen gibt, mit dem man alle Zahlen auflisten kann. Um dies zu zeigen, wird die Aussage angenommen, die Menge der reellen Zahlen sei abzählbar, also genau das Gegenteil des eigentlichen Ziels. Sind die rellen Zahlen abzählbar, dann auch sicher die Zahlen zwischen 0 und 1, da die Zahlen in diesem Intervall weniger sind als alle reellen Zahlen. Folglich wird es auch irgendeine Liste geben, die eine eindeutige (in der Sprache der Mathematik: bijektive) Zuordnung zwischen all diesen reellen Zahlen und den natürlichen Zahlen herstellt, wie beispielsweise:

natürliche Zahlen		reelle Zahlen
1	$\leftrightarrow$	0,**2**043214 ...
2	$\leftrightarrow$	0,0**1**78425 ...
3	$\leftrightarrow$	0,62**8**4620 ...
4	$\leftrightarrow$	0,834**5**951 ...
5	$\leftrightarrow$	0,5909**1**03 ...
6	$\leftrightarrow$	0,96823**3**4 ...
7	$\leftrightarrow$	0,314159**6** ...
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Für die angegebene Liste wurden die Ziffern der Diagonale fett gedruckt. Aus diesen hervorgehobenen Ziffern lässt sich eine Ziffernfolge erzeugen. Für die angegebene Liste lautet sie: 2, 1, 8, 5, 1, 3, 6 .... Das Diagonalisierungsverfahren konstruiert nun eine reelle Zahl, deren Dezimaldarstellung sich nach dem Komma von dieser Ziffernfolge in jeder Stelle unterscheidet[11]. Jede Diagonalziffer wird durch eine 1 ersetzt, nur wenn die Diagonalziffer 1 ist, wird statt dessen eine 2 geschrieben. Für die Beispielfolge ergibt sich damit die Zahl 0,1211211....
Diese Zahl kann in der obrigen Liste nicht vorkommen, denn sie unterscheidet sich von der ersten Zahl in der ersten Stelle, von der zweiten Zahl in der 2. Stelle und so weiter. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, dass alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 in der Liste aufgeführt seien. Gibt es eine Zahl, die sicher nicht in der Liste vorkommt, so entspricht diese Liste nicht der Eigenschaft alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zu enthalten. Durch das allgemeine Verfahren zur Konstruktion dieser nicht in der Liste enthaltenen Zahl, ist es aber immer möglich, eine solche Zahl zu finden, die nicht in einer

[11] Für die Definition der nicht in der Liste enthaltenen Zahl gibt es eine Vielzahl an möglichen Definitionen, beispielsweise in [Guerrerio] S. 26 oder in [Hodges] S. 119.

Liste vorkommt. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, es gäbe eine solche Liste. Der Widerspruch widerlegt also die Voraussetzung, dass die reellen Zahlen abzählbar seien. Das Gegenteil muss daher war sein. Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar und somit größer als die natürlichen Zahlen.

Auf dieses Verfahren wird in der Informatik immer dann zurückgegriffen, wenn Mengen verglichen werden, die beide unendlich groß, aber nicht gleichmächtig sind. So u.a. bei der Feststellung, dass es Probleme gibt, die nicht berechenbar (siehe Abschnitt 2.4) sind:
Zunächst wird die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ betrachtet. Die natürlichen Zahlen haben hier eine Sonderrolle, da Computer bzw. symbolverarbeitende Maschinen in endlicher Zeit nur endlich beschreibbare Objekte verarbeiten können. In einer ersten Annäherung ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ein von einem Computer zu lösendes „Problem“. Das Cantorsche Diagonalisierungsverfahren wird verwendet, um zu zeigen, dass die Menge aller Funktionen f nicht abzählbar ist. Abzählbarkeit heißt, wie bereits erwähnt, dass die Funktionen nummerierbar sind. Mit der Annahme „f ist abzählbar“ wird ein Widerspruchsbeweis geführt, und das Ziel ist es zu zeigen, dass es immer eine Funktion gibt, die nicht in der Liste f_1, f_2, f_3, ... auftaucht.

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	...
f_1	**7**	9	4	2	8	5	...
f_2	2	**9**	34	13	8	1	...
f_3	7	11	**2**	4	...		
f_4	.	.	.				
.	.	.					
.	.						

Mit der Vorschrift $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n) = f_n(n) + 1$ wird eine Funktion erzeugt, die sich von jeder Funktion f_k für jeden Index an der k-ten Zuordnung unterscheidet. Für die Beispielliste wäre die Zuordnung für g:

$\mathbb{N}$	1	2	3	...
g	8	10	3	...

g ist also nicht in der Liste f_1, f_2, f_3, ... Es folgt, dass die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, und damit die Menge aller Probleme nicht abzählbar ist. Sie ist überabzählbar.
Im zweiten Beweisschritt wird gezeigt, dass die Anzahl der Programme nur abzählbar unendlich groß ist. Die Argumentation läuft entweder über eine lexikographische Auflistung aller möglichen Zustandstabellen aller Turing-Maschinen, oder eine Auflistung aller möglichen Programme. Zunächst werden alle einzeiligen Programme aufgelistet, dann alle zweizeiligen Programme, etc.. Auf jeden Fall ist eine solche Auflistung möglich und das bedeutet, dass es nur abzählbar unendlich viele Programme gibt.
Im dritten Schritt werden die beiden Mengen miteinander verglichen. Die Menge aller Probleme muss zumindest alle Funktionen von $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ enthalten. Aber schon die Menge aller Funktionen ist überabzählbar groß. Die Menge aller Programme ist jedoch nur abzählbar unendlich groß. Somit gibt es mehr Probleme der oben beschriebenen Art, als Algorithmen bzw. Programme zu deren Lösung.
Allerdings stellt sich bei diesem Beweis die Frage, wieviel wohlstrukturierte Probleme es gibt. Wohlstrukturiert bedeutet, dass ein Problemen tatsächlich formulierbar und somit „vernünftig“ ist. Vernünftig (oder in der Sprache der Mathematik: wohlstrukturiert) sind Probleme dann, wenn sie auch in einer Sprache hingeschrieben werden können. Aber die Menge aller beschreibbaren Probleme lässt sich wieder lexikographisch sortieren und ist

damit auch nur abzählbar unendlich groß. Deswegen ist es wichtig festzustellen, dass es Probleme gibt, die tatsächlich wohlstrukuriert **und** nicht berechenbar sind. Ein Beispiel dafür stellt das Halteproblem dar.

2.4 Die Frage nach der Berechenbarkeit

Alle, die Programmiererfahrung mit Computern gemacht haben, verfügen über eine intuitive Vorstellung, was man unter Berechenbarkeit versteht. In der Alltagssprache ausgedrückt ist ein Problem (mathematisch gesprochen: eine Funktion) berechenbar, wenn es ein Rechenverfahren (Algorithmus[12]) gibt, das nach endlich vielen Schritten das Problem mit einer Ausgabe löst (die Funktionswerte ermittelt), siehe [Schöning] S. 91. Beispiele für nichttriviale Fragen nach der Berechenbarkeit von Funktionen findet man beispielsweise in [Schöning] S. 92 und in dieser Arbeit auf der Seite 21 sowie im folgenden Abschnitt.
„Berechenbarkeit“ ist der grundlegende Begriff für das Verständnis für die Arbeit von Church (Abschnitt 6) und der Churchschen These. Aber bereits Kurt Gödel (Abschnitt 3.2) verwendet eine mathematische Definition dieses Begriffs.

2.5 Das Halteproblem

Das Halteproblem stellt die Frage, ob es einen allgemeinen Algorithmus gibt, der feststellt, ob ein Programm anhält (terminiert), oder nicht. Dieses Problem taucht in einer allgemeinen und in einer speziellen Version auf. Die allgemeine Fassung fragt, ob ein Programm generell terminiert, und das spezielle Halteproblem fragt, ob ein Programm mit einer bestimmten Eingabe terminiert. Das Halteproblem ist nicht berechenbar[13]. Die Beweisführung folgt meist dem Prinzip, zunächst die Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems zu zeigen, und anschließend nachzuweisen, dass das spezielle Halteproblem im allgemeinen enthalten ist. Daraus folgt sofort, dass dieses dann auch nicht entscheidbar ist.
Für die philosophische Diskussion der Überlegenheit des Menschen gegenüber der Maschine wurde dieses Argument immer wieder aufgegriffen[14]. Der Beweis der Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems wird über die Konstruktion eines „Haltetesters“, also eines Programms, das angeblich das Halteproblem lösen kann, gemacht. Dieser Haltetester wird dann auf sich selbst angewandt und ein Widerspruch erzeugt. Aus diesem Widerspruch folgt, dass die Annahme, nämlich ein Haltetester existiert, falsch war. Es gibt also kein Algorithmus zur Entscheidung des Halteproblems (Beweise siehe [Schöning] S. 122ff und [Asteroth] S. 99ff). Das Verfahren zur Konstruktion eines Gegenbeispiels zu einem vorgeschlagenen, möglichen Haltetester ist algorithmisch. Deswegen könnte es auch in ein Computerprogramm implementiert und von einem Computer ausgeführt werden.

Der Philosoph John Lucas (Oxford University) war ein Gegner der starken Künstlichen Intelligenz, die jeder Maschine „gewisse geistige Qualitäten“ ([Penrose] S. 15) zuschreibt und keinen Unterschied zwischen Menschen und Maschinen macht. Er begründete die Überlegenheit des Menschen gegenüber der Maschine mit einer „Frage des Gödeltyps“, welcher der Mensch stellen kann und deren Wahrheitsgehalt er kennt, welche die Maschine

[12] Der Begriff des Algorithmus, seine Entwicklung und viele Beispiele finden sich in [Ziegenbalg].

[13] Statt dem Wort „berechenbar“, das eher auf Funktionen zugeschnitten ist, verwendet die Informatik auch den Begriff „endscheidbar“, der eher auf den Bereich der Sprachen angewendet wird.

[14] In [Harel] findet sich eine ausführlichere Diskussion der Grenzen des Computereinsatzes.

jedoch nicht beantworten kann[15]. Dazu nimmt man z.B. eine entsprechende Instanz des Halteproblems oder eine andere Aussage, welche die Maschine nicht beantworten kann (siehe 3.2, Gödelscher Unvollständigkeitssatz). Wie bereits gezeigt wurde, ist jedoch die Konstruktion des Gegenbeispiels für einen Haltetester - sowie auch die Beweismethode von Gödel - algorithmisch und kann in ein Computerprogramm umgesetzt werden. So einfach lässt sich ein qualitativer Unterschied zwischen Mensch und Maschine nicht begründen.

3 Kurt Gödel

Du kannst deine eigene Sprache
in deiner eigenen Sprache beschreiben:
aber nicht ganz.
Du kannst dein eigenes Gehirn
mit deinem eigenen Gehirn erforschen:
aber nicht ganz.

aus *„Hommage à Gödel“* in [Enzensberger] S. 9

In der Alltagssprache ausgedrückt, lässt sich der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz etwa so formulieren: *„Die Mathematik lässt sich in kein formales Korsett zwängen, so beharrlich und hartnäckig auch immer Bemühungen in diese Richtung gehen mögen.“* Als weitere Konsequenz ergab sich der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz: *„dass kein formales System, das bedeutende Teile der Mathematik beinhaltet, seine eigene Widerspruchsfreiheit zu beweisen vermag.“*(Zitate aus [Guerrerio] S. 3).
Diese beiden Sätze haben die Mathematik und die Philosophie geprägt. Um den Weg zu diesen Sätzen nachvollziehen zu können, wird hier zunächst der Blick auf die Entwicklung von Kurt Gödel gelenkt.

3.1 Biographie

In der mährischen Hauptstadt Brünn wurde Kurt Gödel am 28. April 1906 in eine wohlhabende Familie hinein geboren. Die Familie Gödel gehörte zu der dortigen deutschsprachigen Minderheit, die ihren kulturellen Bezugspunkt in Wien sah, der Hauptstadt der damaligen Habsburger Monarchie. Kurt wurde wie seine Mutter evangelisch getauft, während sein Vater formal römisch-katholisch war. Die Schulbildung war durch eine strenge Rollenverteilung zwischen Lehrern und Schülern peprägt. Kurt lernte Latein, Englisch und Französisch, doch Tschechisch wurde in der Schule nur ansatzweise unterrichtet. Die Hartnäckigkeit bei seiner Suche nach Antworten auf ihm wichtige Fragen brachte ihm innerhalb seiner Familie den Namen „Herr Warum“ ein. Die Schule schloss er mit Bestnoten ab und lernte Physik autodidaktisch.
Der ersten Weltkrieg beeinflusste das Leben der Familie Gödel kaum. Die jedoch neu entstandene Tschechische Republik machte Tschechisch zur Nationalsprache und Kurt fühlte sich wie „ein österreichischer Verbannter in Tschechien“. Zum Studium der Physik zog es ihn daher im Herbst 1924 nach Wien. Dort besuchte er zunächst neben den Veranstaltungen der Physik auch philosophische und mathematische Vorlesungen, und nicht zuletzt Philipp Furtwänglers Vorlesung weckten in Kurt Gödel den Wunsch, sich mit den Grundlagen der Mathematik auseinander zu setzen. Dieser Wechsel war auch philosophisch begründet, da er das Zentrum jeder Begriffszerlegung in der Mathematik sah.

[15] Einen kleinen Einblick in seine Schriften kann man durch die Übersetzungen in [Hofstadter] erhalten. Dort findet sich auch eine Diskussion seiner Argumentation.

Seine Kollegen beschrieben ihn als außerordentlich kompetent und sehr still, mit einer Hemmung sich an nichtmathematischen Unterhaltungen zu beteiligen. Seine Äußerungen waren „stets von höchster Präzision und dabei von unübertrefflicher Kürze“ ([Guerrerio] S. 34). Dem Wiener Kreis gehörte er ebenfalls an, auch wenn er sich nie als logischer Positivist verstand. Die Diskussionen in den Wiener Kaffeehäusern gehörten allerdings sicher zu den inspirierenden Unterhaltungen, die ihm eine Einführung in philosophische und mathematische Probleme sowie Literatur gaben.
1927 lernt er seine große Liebe Adele Nimburski kennen, die als Garderobiere in einem Nachtlokal arbeitete. Kurts Eltern sprachen sich gegen die Beziehung zu einer fast sieben Jahre älteren Frau aus, die nicht aus gutem Hause, sowie katholisch und geschieden war. Erst 1938, vor seinem dritten Princeton-Aufenthalt und nachdem sein Vater schon fast 10 Jahre tot war, heiratete er Adele.
Im Sommer 1929 wurde Kurt Gödel österreichischer Staatsbürger und dokumentiert damit seine emotionale und wissenschaftliche Bindung an Wien. Trotz des Todes seines Vaters beendete er im gleichen Jahr seine Dissertation über die Vollständigkeit der Prädikatenlogik erster Stufe. Seine Ergebnisse über die Untersuchung der Unvollständigkeit trug er zum ersten Mal im September 1930 in Königsberg vor, allerdings wurden sie an dieser Stelle nur von John von Neumann wahrgenommen. Hilbert wurde erst später von Kollegen über das Gödelsche Resultat informiert, doch in welchen Ausmaß Hilberts Ziele von den Gödelschen Resultaten betroffen wurden, zeigte sich erst Jahre später. 1931 reichte Gödel seine Abhandlung *„Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme“* zur Erlangung einer Dozentenstelle in Wien ein. Die Dozentur erhielt er zu Beginn des Jahres 1933, und im Herbst des gleichen Jahres folgte er einer Einladung an das Institute for Advanced Studies (IAS) in Princeton, USA.
In den Jahren 1931 bis 1933 legte sich Kurt Gödel ein enormes Arbeitspensum auf, das ihn an den Rand eines psychischen Zusammenbruchs führte. Jedoch machten ihn seine Vorträge und Veröffentlichungen in der mathematischen Fachwelt immer bekannter. In diesen Jahren intensiver Arbeit kamen ganz langsam auch erste Anzeichen einer zwanghaften Persönlichkeitsstörung zum Vorschein, mit der er bis zum Ende seines Lebens zu kämpfen hatte. Zum Einen quälte er sich immer wieder mit Depressionen und Zwangsvorstellungen, zum Anderen sorgte er sich in hypochondrischer Art um seine eigene Gesundheit.
Bei seiner Rückkehr von Princeton im Frühjahr 1934 hatte er bereits eine Einladung für den Herbst in der Tasche, doch die Reise verzögerte sich, da er sich wegen eines Zustandes nervöser Erschöpfung in ein Sanatorium zurückziehen musste. Erst im folgenden Jahr brach er nach Princeton auf, blieb aber nur zwei Monate. Seine geistige Störung verschlimmerte sich zu einer ernsthaften Depression. Mehrere Monate verbrachte er daraufhin in einer psychiatrischen Klinik in Wien, wobei er sich bald der Lektüre psychiatrischer Abhandlungen und zum Thema Vergiftung widmete. Später wuchs sich die Angst vor Vergiftung so weit aus, dass er jede Nahrungsaufnahme verweigerte, wenn nicht seine Frau vorkostete oder er selbst die Mahlzeit zubereitet hatte.
Gödels mangelnde Einschätzung der politischen Lage rief bei Kollegen Verwunderung hervor. Über Benachteiligungen im akademischen Leben beschwerte er sich unter Kollegen, aber die zunehmende Gefahr für Leib und Leben realisierte er erst, nachdem er 1939 auf offener Straße angegriffen wurde. Über die Veränderung der gesellschaftlichen Stimmung zuvor äußerte er sich nicht, auch wenn es bekannt war, dass er Trotzki und Lenin las.
Nach der Ermordung Moritz Schlicks (1882 - 1936), dem Tod Hans Hahns und der Auswanderung weiterer Intellektueller wurde das Klima in Wien für Gödel immer unangenehmer. Dies dämpfte sein Arbeitstempo allerdings nicht. Er beschäftigte sich intensiv mit der Kontinuumshypothese und dessen Verhältnis zu den Peano-Axiomen, sowie der

axiomatischen Mengenlehre von Zermelo und Fraenkel.
Von Neumann lud Gödel für das Studienjahr 1938/39 wieder nach Princeton ein, und dieser akzeptierte das Angebot. Während seines Aufenthaltes erfuhr er, dass das Dritte Reich eine Universitätsreform beschlossen hatte, die die Abschaffung seines Privatdozententitels vorsah. Diese Beeinträchtigung ließ ihn Vorbereitungen für seine spätere Auswanderung nach Amerika treffen.
Als er nach Wien zurückkehrte, kam überraschend die Einberufung der Militärbehörde. Es war ihm klar, dass die offiziellen Stellen nichts von seiner psychiatrischen Behandlung erfahren durften, denn einmal für geisteskrank befunden, bedeutete dies eine Gefahr für Leib und Leben. Allerdings durfte auch die amerikanische Einwanderungsbehörde nichts davon wissen, damit sie ihm das Visum nicht verwehrte. Durch den Verlust seiner Privatdozentenstelle verlor er außerdem seine materielle Sicherheit. Als die deutschen Behörden seinem Auswanderungsantrag zustimmten, war der Seeweg über den Atlantik bereits durch die Kriegsblockaden verwehrt. Gödel und seine Frau mussten mit der transsibirischen Eisenbahn bis Wladiwostok und per Schiff weiter nach Yokohama, ehe sie die Reise nach San Francisco antreten konnten. Dort kamen sie am 4. März 1940 an.
Bis 1946 erhielt Gödel am IAS nur Verlägerungen seines Vertrages um jeweils ein Jahr. Erst dann wurde er ständiges Mitglied am IAS. Zwei Jahre später erhielt er amerikanische Staatsbürgerschaft. Seine Ernennung zum Professor bekam er erst 1953, da die Mehrheit des Direktoriums des IAS ihm die Verwaltungsaufgaben wegen seiner psychischen Labilität und seiner übertriebenen Pedanterie nicht zutraute[16].
Zu Albert Einstein entwickelte sich zwischen 1942 und 1956 eine Freundschaft. Die beiden Männer waren in vielen Dingen komplementär. Beide hatten in ihrer Jugend die Wahl zwischen Mathematik und Physik, und sie entschieden sich jeweils für verschiedene Disziplinen. Einstein teilte Gödels zunehmendes Interesse an Philosophie. Diesem Bereich widmet Gödel in seinen späteren Überlegungen immer breiteren Raum.
In Princeton arbeitete Gödel weiter am Kontinuum und seine Gespräche mit Einstein weckten sein Interessse an der allgemeinen Relativitätstheorie. Im Rahmen eigener Berechnungen entwickelte er ein eigenes kosmologisches Modell. Sein letzter publizierter Artikel erschien 1958.
Kurt Gödel starb am 14. Januar 1978 im Princeton-Hospital an Unterernährung, nachdem er jahrzehntelang mit gesundheitlichen Problemen, vornehmlich psychischer Art, gekämpft hatte.

3.2 Die Unvollständigkeitssätze

„Jedes Beweissystem für die Menge der wahren arithmetischen Formeln ist notwendigerweise unvollständig(d.h. es bleiben immer wahre arithmetische Formeln übrig, die nicht beweisbar sind).“ (aus [Schöning] S. 149).

Die Beweisführung von Gödel gliedert sich in mehrere Teilschritte, die hier nur angedeutet werden können. Eine ausführlichere Darstellung der Idee findet sich in [Penrose] S. 103ff und [Guerrerio] S. 46ff. Eine genaue Beweisführung wird ferner in [Stegmüller] und [Gödel] geliefert.
Die Probleme vor Gödel lagen vor allem in der Vermischung von Metasprache und Objekt-

[16] Auf die formlose Befragung zur Verleihung der amerikanischen Staatsbürgerschaft bereitete er sich so detailiert vor, dass ihm eine logisch-juristische Lücke im Verfassungstext der Vereinigten Staaten auffiel, die unter gewissen Voraussetzungen die Möglichkeit einer Diktatur zulies. Bei der Befragung machte der Richter eine Bemerkung zu den Zuständen in Deutschland. Auf die abschließende Bemerkung, dass so etwas in Amerika nicht möglich sei, erhob Gödel prompt Einspruch ([Guerrerio] S. 92).

sprache. Metasprache ist die Sprachebene über die Objekte, Objektsprache ist die Sprachebene zwischen den Objekten. Beispielsweise müssen bei der Behandlung von gleichungsspezifischen Modellen (Gruppen, Ringe, etc.) arithmetische Ausdrücke ($x^2 + 4x - 3$: Objektsprache) von Aussagen über Arithmetik („Alle quadratische Funktionen haben einen Scheitelpunkt“: Metasprache) unterschieden werden. Ein bekanntes Paradoxon, das durch die Vermischung der beiden Sprachebenen entsteht, ist das Richard-Berry-Paradoxon: „Sei n die kleinste Zahl, welche in deutscher Sprache nicht mit weniger als 200 Buchstaben beschrieben werden kann.“[17] Da dieser Satz weniger als 200 Buchstaben hat, kann n nicht angegeben werden[18].

Der Ablauf des Beweises von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz sei hier überblickartig skizziert:
Zunächst übersetzte Gödel jedes Symbol der Peano-Arithmetik, sowie alle Formeln, und alle endlichen Folgen von Formeln in eine Zahl (Gödelzahl). Damit diese Arithmetisierung überhaupt anwendbar ist, wird durch primitiv-rekursive Funktionen eine Klasse von Funktionen bereitgestellt, die immer berechenbar ist[19]. Durch diese „Gödelisierung“ können metasprachliche Begriffe aus der Syntax der Peano-Arithmetik in Eigenschaften natürlicher Zahlen übertragen werden. Insbesondere kann die Aussage G(x) = „x ist eine beweisbare Formel“ in eine Aussagefunktion übersetzt werden. Anschießend bildete Gödel eine Kette von 45 Funktionen, die jeweils aus den vorherigen mittels der definierten Verfahren hervorgingen. Die 46. Funktion war schließlich die Definition der Beweisbarkeit. Über den Beweis, dass die Ersetzungsfunktion auch primitiv-rekursiv ist, konnte er die Gödelzahl der Aussage „Dieser Satz ist nicht beweisbar“ in die Funktion 46 selbst einsetzen. Diese letzte Konstruktion ist wohldefiniert und syntaktisch korrekt, allerdings lässt sie sich in einem widerspruchsfreien Axiomensystem nicht beweisen. Auch ihre Negation nicht.

Im Einzelnen zur Gödelisierung: Für die Gödelisierung wird jedem Symbol der Peano-Arithmetik eine ungerade Zahl zugeordnet. Eine Formel ist eine Folge von Symbolen und somit als eine Folge von ungeraden Zahlen zu übersetzen: $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$. Diese Folge kann in eine Zahl m übersetzt werden, indem man die Vorschrift $m = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ anwendet, wobei die Zahlen p_k die k-te Primzahl darstellt. m ist die Gödelzahl der Formel. Ein Beweis ist eine (endliche) Folge von Formeln, die entweder aus einem Axiom bestehen oder aus anderen Formeln ableitbar sind, die wieder auf Axiome zurückzuführen sind.

[17] Das Problem ist nicht die Definition. Pro Buchstaben (mit Satzzeichen, Umlauten etc.) gibt es maximal 100 Möglichkeiten. Mit 200 Buchstaben lassen sich demnach 100^{200} Zahlen beschreiben. Das sind endlich viele. Da es aber unendlich viele Zahlen gibt, gibt es auch unendlich viele, die nicht so beschreibbar sind. Jede Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element und dieses sei n. Die Definition ist also konstruktiv. Der Fehler liegt in der Vermischung der Sprachebenen.
In der Informatik gibt es ein Analogon: „Sei n die kleinste Zahl, die nicht durch ein Programm mit weniger als 200 Zeichen erzeugt wird.“ Dies ist zwar eine richtige Definition, doch diese kann nicht in ein Programm ungesetzt werden. Denn nicht alle Programme terminieren oder erzeugen eine Ausgabe.

[18] Ein weiteres Beispiel ist die Tatsache, dass die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre - so sie konsistent ist - abzählbare (in der Metasprache) Modelle besitzt, obwohl sie (auf Objekt-Ebene) die reellen Zahlen enthält, die überabzählbar sind. Dies ist eine Folgerung aus dem Satz von Löwenheim/Skolem.

[19] Rekursive Funktionen wurden schon zuvor von Dedekind, Peano und Skolem untersucht. Gödel genügten für seinen Beweis die primitiv-rekursiven Funktionen. Ackermann zeigte in seiner Arbeit *„Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen“*, dass nicht alle berechenbaren Funktionen primitiv-rekursiv sind. Er bildete eine (ursprünglich dreistellige) Funktionen von der er zeigen konnte, dass sie überall eindeutig stetig definiert und intuitiv berechenbar ist. Allerdings wächst diese Funktion so stark, dass sie jede primitiv rekursive Funktion übersteigt. Somit ist sie nicht primitiv-rekursiv. Eine genaue Diskussion der Ackermann-Funktion findet sich in [Schöning].

Folgen von Formeln, also ganze Beweise, können in eine Zahl übersetzt werden, indem zunächst jede Formel in eine Zahl m_i übersetzt wird und anschließend eine neue Gödelzahl nach obriger Zahl berechnet wird: $l = 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_j}$. Dieses Vorgehen zur Erzeugung von Gödelzahlen ist nicht nur eindeutig, sondern aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung auch umkehrbar. Aus jeder Gödelzahl kann berechnet werden, ob sie die Gödelzahl eines Symbols, einer Formel oder einer Folge von Formeln ist. Auch wenn die Übertragungsidee, Zeichenketten in natürliche Zahlen zu übersetzen, von Leibniz erfunden wurde, so wird sie doch Gödelisierung genannt, da Gödel sie zum ersten Mal in der mathematischen Praxis einsetzte.

Der intuitive Begriff *„berechenbar“* wurde bereits im Abschnit 2.4 angesprochen. Mit dieser Definition lässt sich aber formal mathematisch nur schlecht arbeiten: Gödel gibt mit den primitiv-rekursiven Funktionen eine erste eigene Definition des Berechenbarkeitsbegriffs. Damit wird jede Funktion in den natürlichen Zahlen als primitiv-rekursiv definiert, die sich aus fünf Basisfunktionen zusammensetzen lässt (siehe [Guerrerio] oder [Schöning]):

1. die Nullfunktion, deren Wert stehts null ist ($\text{Null}_k(n_1, \ldots, x_k) = 0$).
2. die Nachfolgerfunktion s(x), die ihr Argument auf den Nachfolger abbildet (Die Addition ist noch nicht definiert, also darf $s(x) = x + 1$ nicht geschrieben werden).
3. die Projektion auf das i-te Argument ($\text{Proj}_i(n_1, \ldots, x_k) = x_i$).
4. die Kompositionsregel (statt der Argumente primitiv-rekursiver Funktionen dürfen auch wieder selbst primitiv-rekursive Funktionen eingesetzt werden).
5. die Rekursionsregel (die Definition von $f(n{+}1, \ldots)$ wird zurückgeführt auf $f(n, \ldots)$).

Ein Beispiel: Die Addition lässt sich durch zwei Regeln definieren: $+(n, 0) = n$ und $+(n, s(m)) = s(+(n, m))$. Mit dieser Definition ist beispielsweise $+(2, 2) = s(+(2, 1)) = s(s(+(2, 0))) = s(s(2)) = s(3) = 4$. Dieses Konzept ist außerordentlich stark, da es die Definition beliebig komplizierter Funktionen erlaubt.

Der Kernschluss des Unvollständigkeitssatzes:
Die Nummer 46 der von ihm aufgestellten Funktionen definiert die Beweisbarkeit:

$$\text{Bew}(x) \equiv (\exists\, y) \quad y\ B\ x,$$

wobei die zweistellige Funktion „$y\ B\ x$“ (angegeben als Nr. 45) zu interpretieren ist, als:

„(Die Formelfolge mit der Gödelzahl) y ist ein Beweis für (die Formel mit der Gödelzahl) x“.

Damit kann die Formel 46 in Worten beschrieben werden:
„Die Formel x ist beweisbar genau dann, wenn es eine Formelfolge y gibt, die x beweist.“
Gödel konstruierte so eine Formel für den Satz „x ist eine beweisbare Formel“, aber auch für die Negation.
Mit der Ersetzungsfunktion, von der Gödel zeigte, dass sie auch primitiv-rekursiv ist, kann man in einer Formel für eine Variable einen Zahlenwert einsetzen. Das erlaubt nun eine Selbstreferenz auf die Funktion selbst. Für den letztendlichen Schluss wird die Aussage

$$\text{F}(x) = \text{„Der Satz (mit der Gödelzahl) } x \text{ ist } \textbf{nicht} \text{ beweisbar“}$$

betrachtet. Gödel schaffte es eine Gödelnummer f zu finden, so dass der Satz $\text{F}(f)$ die gleiche Gödelnummer hat wie f: Gödelnr (F (f)) $= f$.
Um einen solchen „Fixpunkt“ f zu finden, verwendete Gödel das bereits vorgestellte Verfahren der Diagonalisierung (siehe Abschnitt 2.3). Wir erhalten also die speziell konstruierte, wahre Aussage, dass es für die Formel $\text{F}(f)$ keinen Beweis gibt. Vorausgesetzt unsere Peano-Axiome sind richtig und die Ableitungsregeln sind korrekt ausgeführt, dann

gibt es keinen Beweis der Behauptung der Formel F(f). Denn gäbe es einen Beweis, dann wäre die Bedeutung dessen, was F(f) behauptet, nähmlich das es keinen Beweis gibt, falsch und F(f) müsste als arithmetische Aussage falsch sein. Damit ist der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz bewiesen.
Eine Konsequenz dieses Beweises ist der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz: Die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems, das genügend reichhaltig ist, um zumindest das Zählen mit natürlichen Zahlen zuzulassen, lässt sich mit den Mitteln des Systems selbst nicht beweisen. Es ist also nicht möglich, Konsistenzbeweise über das System innerhalb eines Systems selbst zu formulieren. Als Konsequenz dieses Satzes benötigt man für jeden Widerspruchsbeweis einer Axiomenmenge weitere Regeln und Axiome, die gleichsam weniger „verlässlich sind als die Prämissen eines jeden anderen Beweises innerhalb der jeweiligen Theorie“([Guerrerio] S.53). Praktisch wird damit häufig nicht die absolute Konsistenz eines Systems überprüft, sondern „nur“ die relative Konsistenz zu einem anderen System.
Als umgangsprachliche Fassungen der Unvollständigkeitssätze hat Hao Wang, ein Mitarbeiter und Vertrauter Gödels, folgende Vorschläge gemacht ([Guerrerio] S.52):

- Die Mathematik ist unerschöpflich: Sie kann nicht vervollständigt werden.
- Jede widerspruchsfreie formale Theorie der Mathematik enthält notwendigerweise unentscheidbare Aussagen.
- Kein Computer(-programm) kann alle und nur die wahren Aussagen der Mathematik beweisen.
- Kein formales System der Mathematik kann sowohl widerspruchsfrei als auch vollständig sein.
- Die Mathematik ist mechanisch (oder gleichwertig: mittels effektiver Verfahren oder Algorithmen) unerschöpflich.

Der Gödelsche Satz wird oft für etwas Negatives angesehen, da er die Beschränktheit formalistischer Betrachtungen zeigt. Allerdings sollte beachtet werden, dass F(f) eine wahre Aussage darstellt, obwohl es nicht formal beweisbar ist. Als Folgerung muss der Begriff der „Wahrheit“ deutlich von der „Beweisbarkeit“ unterschieden werden. Ein rein fomalistischer Begriff der Wahrheit ist unvollständig. Es ist also mehr wahr, als beweisbar ist.
Es könnte der Einwand gemacht werden, dass Aussagen wie F(f), als mathematische Aussagen über Zahlen ausgeschrieben, umständlich und ungewohnt sind. Doch vor einigen Jahren wurden recht einfache mathematische Aussagen veröffentlicht, die tatsächlich mit den Aussagen F(f) äquivalent sind ([Penrose] S. 106). Keinesfalls bewirkte dieser Satz das Ende der Mathematik, wie einige Skeptiker anfangs befürchteten.

Dieser Satz verdeutlichte die Grenzen der formalen Methoden, mit denen Hilbert noch die Axiomatisierung aller Aussagen forderte, und brachte den Traum Hilberts zum Platzen. Hilbert war von Gödels Ergebnissen zunächst irritiert, doch dann „setzte er sich [mit dem Satz] auf positive Art auseinander“ ([Guerrerio] S. 56). Bis 1934 dachte er, dass man „für die weitergehenden Widerspruchsfreiheitsbeweise den finiten Standpunkt in einer schärferen Weise ausnutzen muss, als dies bei der Betrachtung der elementaren Formalismen erforderlich ist“ ([Guerrerio] S. 56). Erst später wurde die Unerfüllbarkeit seiner Ziele deutlich. Gödel zeigte, dass das so genannte Auswahlaxiom nicht im Widerspruch zur Arithmetik steht, dies aber im System der Arithmetik nicht beweisbar ist. Paul Cohen

bewies 1963 sogar noch, dass das Gegenteil des Auswahlaxioms ebenso mit der Arithmetik vereinbar ist, wie das Auswahlaxiom selbst. Das sollte nach Hilberts Vorstellung aber genau nicht möglich sein, wie er in einem Vortag 1930 erklärte: „Wenn eine Aussage als widerspruchsfrei erwiesen werden kann, so ist sie auch beweisbar.“

4 Alan Turing

> Fest steht, dass er nie eine Zeitung gelesen hat; dass er sich seine Handschuhe selber strickte; ...
> Aus Überdruss an öffentlichen Verkehrsmitteln lief er oft meilenweit über Land. ...
> Der Geheimdienst schätzte ihn, weil er jeden Code brechen konnte.
>
> aus *„Alan Mathison Turing“* in [Enzensberger] S. 39

4.1 Biographie

Am 23. Juni 1912 wurde Alan Mathison Turing in Paddington als zweiter Sohn eines Verwaltungsbeamten der britischen Kolonialbehörden von Madras in Indien geboren. Die Familie Turing stammte aus der Nahtstelle zwischen altem Landadel und begüteter Geschäftswelt, ohne dass die Vorfahren Alans dauerhaft an einem Ort seßhaft wurden. Vielmehr kamen sie durch die Expansion des britischen Weltreiches durch sehr viele Länder.
Seine Eltern beschlossen die beiden Söhne bei Pflegeeltern, der Familie Ward, zu lassen, während sie selbst immer wieder für viele Monate oder Jahre zurück nach Indien gingen. Die Wards versuchten die beiden Jungen zu „richtigen Männern“ zu erziehen, allerdings ohne den gewünschten Erfolg. Statt für Kriegsspiele interessierten sie sich eher für Bücher. Insbesondere Alan „kam zu spät, war unordentlich und frech, ...“ ([Hodges] S. 9).
1918 kam Alan in eine Tagesschule für Latein, doch in der Zeit, als sich seine Mutter zwischen 1919 und 1921 in Indien aufhielt, veränderte er sich von einem extrem lebhaften und kontaktfreudigen zu einem ungeselligen und verträumten Kind. Im Jahre 1922 wurde Alan dann nach Hazelhurst geschickt, die gleiche Jungenschule, die auch sein Bruder besuchte. Während er sich früher für Rezepte interessierte hatte, faszinierten ihn nun Naturwissenschaften immer mehr. 1926 wechselte er auf die Public-School in Sherborne. Im gleichen Jahr legte der Vater sein Amt im Indian Civil Service nieder. Seine Eltern kehrten jedoch aus steuerlichen Gründen nicht nach England zurück, sondern zogen in die Bretagne.
Die englische Public-School hatte als Selbstverständnis das Bild der „Miniaturnation“ und Rangordnung. Die Idee von Autorität und Gehorsam stand über den persönlichen Wünschen. In dieser Umgebung entwickelte sich Alan immer mehr zum Einzelgänger. Andere Schüler nannten ihn wegen seines dunklen fettigen Teints und seiner unordentlichen Haare schmutzig. Auch mit Hemden und Krawatten stand er sein Leben lang auf Kriegsfuß. So wurde er häufig zur Zielscheibe für den Spott seiner Mitschüler.
Während seiner Zeit in der Public-School entdeckte Alan seine homosexuelle Neigung. 1927 lernte er den ein Jahr älteren Schüler Christopher Morcom näher kennen. Auch wenn sie sich nie köperlich näher kamen, war es doch seine erste große Liebe. Christopher teilte sein Interesse für die Naturwissenschaften, war aber ansonsten ein anderer Typ als Alan. Sie wurden sehr enge Freunde und arbeiten miteinander an verschiedenen Projekten. Durch Christophers Interesse an der Astronomie wechselte auch Alan von der Chemie zur Beobachtung der Sterne.

Alan wußte nicht, dass Christopher an Rindertuberkulose erkrankt war und so traf ihn dessen Tod am 13. Februar 1930 unvorbereitet. Mit Christophers Mutter hielt Alan danach noch viele Jahr Kontakt. Im Jahr 1932 schrieb er Mrs. Morcom einen Brief, der einen tiefen Einblick in seine Vorstellungen über den Geist eines Menschen erlaubt ([Hodges] S. 75):

> „Natur des Geistes
>
> Wir haben einen Willen, der das Verhalten der Atome wahrscheinlich in einem kleinen Teil des Gehirns bestimmen kann oder möglicherweise im ganzen.[20] Der Rest des Körpers handelt, um dies zu verstärken. ...
>
> Persönlich denke ich, dass der Geist wirklich ewig mit der Materie verbunden ist, aber sicher nicht immer durch dieselbe Art von Körper....
>
> Was geschieht wenn der Körper schläft, darüber habe ich keine Vermutung, aber wenn der Körper stirbt, ist der „Mechanismus“ des Körpers, der den Geist hält, verschwunden und der Geist findet früher oder später einen neuen Körper, vielleicht sofort.“

In der Quantenmechanik fand Alan Turing eine Möglichkeit Determinismus und Willensfreiheit von Geist und Materie zu vereinbaren. Im Bezug auf seine weitere Entwicklung wird diese Überzeugung noch aufgegriffen werden (siehe Seite 23).

Im Jahr 1931 begann er mit dem Studium der Mathematik am King's College in Cambridge. Sein Interesse galt dabei vor allem der reinen Mathematik. Während seiner Studienzeit hatte Turing mehrere Beziehungen mit anderen Studenten. Offiziell war Homosexualität ein geächtetes Thema, allerdings gab es am King's College eine relativ liberale Haltung. Turing schätzte diese „moralische Autonomie“ ([Hodges] S. 83), in der seine persönliche Freiheit haben konnte.

Neben Eddingtons Darstellungen laß Turing auch von Neumanns Buch *„Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik“* und sah dieses Gebiet als Beispiel, wie eine unabhängige Mathematik die Grundlagen für eine Beschreibung von Zuständen physikalischer Systeme geschaffen hat. Im Juni 1934 schloss Turing seine Prüfungen mit Auszeichung ab und erhielt ein Forschungsstipendium. Zu Beginn des gleichen Jahres war ihm bereits ein Beweis des zentralen Grenzwertsatzes gelungen, der jedoch schon 1922 ersmals bewiesen worden war. Aber seine davon unabhängige Arbeit genügte als Grundlage für ein King's Fellowship[21] akzeptiert. Am 16. März wurde er zum Fellow gewählt und im April erschien eine Ergänzung zur Arbeit von Neumanns als Turings erste Veröffentlichung. Bis zum April 1936 arbeitete er an der Beantwortung von Hilberts Entscheidungsproblem (20). In diesem Rahmen entwickelte er das Konzept der Turing-Maschine, die in Abschnitt 4.2 erörtert wird. Etwa zum gleichen Zeitpunkt als Turing seine Entwicklungen mit anderen Mathematikern besprach, legte Alonzo Church (siehe Abschnit 6) seine Arbeit zur Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems in Princeton vor. Doch der Weg den Turing einschlug war direkter und umfassender. Bis Ende August arbeitete er noch an dem Appendix seiner Arbeit, in dem er die Äquivalenz des Berechenbarkeitsbegriffs von Churchs Lambda-Kalküls mit seinem eigenen zeigte. Erst damit konnte seine Arbeit *„On computeable numbers with an application to the Enscheindungsproblem“* gedruckt werden. Am 29. September 1936 kam Turing dann in Amerika an, wo er für ein Jahr bei Gödel bzw. Church und Kleene studieren wollte. Allerdings war Gödel zu diesem Zeitpunkt wieder in Wien, so dass er nur die Vorlesungen von Church besuchen konnte. Auch mit von Neumann arbeitete er zusammen. Die Anwendung von Turing-Maschinen in Zusammenhang

[20] Der Hintergrund dieser Feststellung wird in [Hodges] S. 75ff erläutert.

[21] Dies brachte für einen Zeitraum von drei Jahren 300 £ jährlich, bei freier Unterkunft und Verpflegung im College.

mit Codes kamen ihm hier schon mehrfach in den Sinn.
Im Januar 1937 kam dann die Veröffentlung von *„On computeable numbers“*, allerdings hielten sich die Reaktionen in Grenzen. Emil Post (siehe Abschnitt 5) interessierte sich für seine Veröffentlichung, da er ähnliche Ansätze in seiner eigenen Arbeit hatte. Für drei Monate kehrte Turing im Sommer 1937 nach England zurück. Anschließend begann er mit der Anfertigung seiner Doktorarbeit. Im Zusammenhang mit Codes und Kryptoanalyse konstruierte er einen Multiplizierer, der ihm bei bei der Verschlüsselung von Nachrichten helfen sollte. Auch bei dem Problem der Nullstellensuche bei der Zeta-Funktion[22] dachte er an maschinelle Unterstützung. Am 21. Juni 1938 wurde ihm der Doktortitel zuerkannt und einen Monat später traf er in England ein, wo sein Fellowship erneuert wurde.
Kurz nach seiner Rückkehr wurde er zu einem Kurs der Government Code and Cypher School eingeladen. Dies war der erste Kontakt zu seiner späteren Tätigkeit. Im Frühling 1939 startete seine erste Vorlesungsreihe in Cambridge. Gleichzeitig versuchte er die Zeta-Funktion-Maschine zu realisieren. Der Ausbruch des Krieges ließ ihn jedoch dieses Projekt nicht beenden. Im Bletchley Park arbeitete Turing stattdessen an der Entschlüsselung der Enigma mit. Er entwickelte Maschinen, „Bomben“ genannt, die eine große Zahl von Kombinationen ausprobierten, bis sinnvoller Klartext aus den verschlüsselten deutschen Geheimtexten entstand. Eine detaillierte Dartellung zu Turings Arbeit in Bletchley Park findet sich in [Hodges] und [Singh].
Nach Beendigung des Krieges war Turing mit der Konstruktion von Computern am National Physical Laboratory und mit Computerprojekten in Manchester beschäftigt. Auch im Bereich der Künstlichen Intelligenz leistete Turing seinen Beitrag. 1950 schlug er einen Test für Künstliche Intelligenz vor. Im März 1951 wurde er zum Fellow der Royal Society gewählt.
Als Turing im gleichen Jahr wegen eines Einbruchs bei der Polizei Anzeige erstattete, erfuhr diese im Laufe der Untersuchungen von seiner Homosexualität. Dies war damals eine „grobe Sittenlosigkeit nach Paragraph 11 des Criminal Law Amendment Act von 1885“([Hodges] S. 528) und dieses „Verbrechen“ wurde mit bis zu zwei Jahren Gefängnis geahntet. Im März 1952 wurde Alan Turing wegen Homosexualität zu einer Bewährungsstrafe von einem Jahr verurteilt und musste sich einer Hormonbehandlung mit Östrogen unterziehen. Das Verfahren war für ihn mehr als nur eine Peinlichkeit. Er durfte zwar noch weiterarbeiten, hatte jedoch als Vorbestrafter verschiedene Rechte und Karrieremöglichkeiten, wie die Einreise in die USA, verloren. Auch musste er mit den Folgen der Hormonbehandlung, wie dem Wachsen von Brüsten, fertig werden. Seine Freunde hatten den Eindruck, dass er mit dieser Entwicklung in seinem Leben einigermaßen zurecht kam. Am 7. Juni 1954 beging Alan Turing jedoch unerwartet Selbstmord durch Vergiftung.

4.2 Die Turing-Maschine

Nachdem Turing seine Fellowship-Dissertation Ende des Jahres 1934 abgegeben hatte, besuchte er eine Vorlesungsreihe über die Grundlagen der Mathematik von M.H.A. Newman. Dieser war zusammen mit J.W.C. Whitehead der brititsche Vertreter der Topologie. Da die Topologie auf der Mengenlehre aufbaut, war auch Newman in die Grundlagen der Mengenlehre involviert. Auf dem internationalen Kongress 1928 hatte Hilbert seine Forderung nach einer eingehenden Untersuchung der Grundlagen der Mathematik wieder aufgegriffen und Newmanns Vorlesung widmeten sich diesem Thema. Gab es eine

[22] Diese Frage kam auf bei der Abschätzung, wie sich die Primzahldichte für immer größer werdende Zahlen verhält. Bernhard Riemann zeigte, dass die Abschätzung eines Terms äquivalent war zur Frage, ob die die Nullstellen der Zeta-Funktion alle auf einer Geraden liegen.

Möglichkeit abzugrenzen, was sich innerhalb einer Theorie beweisen lässt und was nicht? Dieses Problem hatte einen stark formalistischen Charakter. Hilbert konkretisierte seine Fragen in sehr präziser Form: War die Mathematik *vollständig* in dem technischen Sinne, dass jede Behauptung entweder bewiesen oder wiederlegt werden konnte? War die Mathematik *widerspruchsfrei* in dem Sinne, dass eine Behauptung wie „$2 + 2 = 5$“ nicht durch zulässige Beweisschritte ableitbar ist? und: War die Mathematik entscheidbar, d. h. gab es ein bestimmtes Verfahren, das im Prinzip auf jede Behauptung angewendet werden kann, so dass die Wahrheit der Behauptung überprüft wird? Diese letzte Frage wird auch „Entscheidungsproblem“ genannt.
Auf keiner der Fragen war 1928 eine Lösung bekannt, doch Hilbert war von einer positiven Antwort auf jede Frage überzeugt. 1930 ging er sogar so weit zu behaupten, dass alle Probleme der Mathematik gelöst werden könnten: „Der wirkliche Grund dafür, dass Comte kein unlösbares Problem finden konnte, liegt meiner Ansicht nach in der Tatsache, dass es so etwas wie ein unlösbares Problem nicht gibt“([Hodges] S. 108). Gödel kündigte in der selben Sitzung Ergebnisse an, die dieser Überzeugung einen entscheidenden Schlag geben sollten (Abschnitt 3.2). Die Unvollständigkeit und auch eine Differenzierung zwischen Wahrheit und Beweisbarkeit innerhalb der Arithmetik waren die Konsequenzen aus Gödels Unvollständigkeitssätzen. Auch hatte Gödel gezeigt, dass die formalisierte Arithmetik entweder widerspruchsfrei oder unvollständig ist.
Innerhalb Newmans Vorlesungsreihe wurde Turing mit den Unvollständigkeitssätzen vertraut gemacht. Doch die dritte Frage Hilberts, die jetzt nicht mehr nach der „Wahrheit“, sondern nach der „Beweisbarkeit“ aufgestellter Behauptungen suchte, war weiterhin unbeantwortet. Newman prägte Turing für seine spätere Suche, indem er nach einem „mechanischen Verfahren“ für die Beweisbarkeit fragte. Prominente Vertreter der Mathematik wie Hardy äußerten sich sehr skeptisch, dass selbst die schwierigsten Probleme durch eine „mechanische Menge von Regeln“ bewiesen oder widerlegt werden könnten: „Nur der ungebildetste Außenseiter glaubt, dass Mathematiker Entdeckungen durch das Drehen einer Kurbel irgendeiner wundersamen Maschine machen.“ ([Hodges] S. 110).
Wie Turing später erzählte, ist ihm im Frühsommer 1935 auf einer Wiese bei Grantchester liegend klar geworden, durch welches „mechanische Verfahren“ Hilberts dritte Frage beantwortet werden könnte: Mit Hilfe einer Maschine. Im Unterschied zur Physik oder Chemie musste diese Maschine mit der ihr inneliegenden Determiniertheit zeigen, dass es zu nichts Neuem kommen kann. Außerdem muss sie mit abstrakten Symbolen operieren.[23]
Die alltäglichste Maschine, die mit Symbolen arbeitete, war eine Schreibmaschine. Auch Turings Mutter besaß eine Schreibmaschine, und so könnte dieser mechanische Apparat der Ausgangspunkt von Alan Turings Gedanken gewesen sein. Dies ist allerdings nicht dokumentiert.
Von einer mechansichen Schreibmaschine wusste man genau, wie sie sich auf äußere Eingaben verhielt. Ihre Reaktion hängt von ihrem Zustand ab, Turing nannte dies „Konfiguration“. Bei der Schreibmaschine gab es zwei Zustände: „Groß-“ und „Kleinbuchstaben“-Konfiguration. Von dieser Vorstellung lässt sich eine Maschine abstrahieren, die sich jeweils in exakt einem von endlich vielen Zuständen befindet. Analog, wie es bei der Eingabe über die Schreibmaschinentastatur nur endlich viele Eingabemöglichkeiten gibt, so sollte auch sie nur endlich viele Eingabezeichen erhalten. Mit einer endlichen Menge an Eingabezeichen und Zuständen könnte die Reaktion, also das Verhalten der Maschine, vollständig in endlicher Form, beispielsweise als Tabelle, angegeben werden. Abhängig von Eingabezeichen und vom dem aktuellen Zustand wird der neue Zustand und die Ausgabe aufgelistet.

[23]Eine Darstellung der Entwicklung findet sich in [Agar] und [Hodges].

Die Ausgabe der Schreibmaschine ist ein Blatt Papier, auf dem sich der Anschlagspunkt bewegt, aber der Druckvorgang der Maschine ist unabhängig von der Position dieses Punktes. Für eine allgemeine Maschine, die mit Symbolen arbeitet, waren die vielen Schreibzeilen eines Papierblattes eine unrelevante technische Besonderheit, die man auf eine einzelne Schreibzeile, ähnlich den Telegraphenschreibern, reduzieren kann. Vielmehr muss eine allgemeinere Maschine die Beschränktheit der Schriebmaschine verlassen und viel mehr können, ohne aber die Eigenschaften einer Schreibmaschine, die endliche Zahl von Konfigurationen und ein exakt bestimmtes Verhalten für jede Konfiguration, zu verlieren. Dazu muss einerseits der Papiervorrat für diese Maschine unbegrenzt sein, beispielsweise auf einem endlosen Papierband. Auf diesem Band könnten die Zeichen nacheinander wie auf rechteckige vordefinierte Felder geschrieben werden. Neben dem Schreiben muss das, was auf dem Band steht, aber auch gelesen oder, wie Turing es nannte, „abgetastet“ (engl. „scan“) werden können. Dabei könnte sie sich jeweils einen Schritt nach rechts und links bewegen. Auch das Löschen und Verändern eines Zeichens muss möglich sein.
Dem Menschen kam dabei keine Aufgabe zu, auch wenn Turing die Möglichkeit erwähnte, dass es „Auswahl-Maschinen“ geben könnte, bei denen ein Bediener an bestimmten Stellen Entscheidungen trifft. In erster Linie ging es ihm aber um „automatisch“ genannte Maschinen, bei denen der Mensch nicht eingreift. Denn das Ziel war ja das, was Hardy als „wundersame Maschine“ bezeichnet hatte: Eine Maschine, die jede mathematische Behauptung lesen kann und dann entscheidet, ob sie beweisbar ist oder nicht, ohne das Einwirken menschlicher Intelligenz.
Diese „automatische Maschine“ sollte von alleine lesen, schreiben und das Band hin und her bewegen. Für jeden Schritt durfte ihr Verhalten nur abhängig von ihrer Konfiguration und dem eingelesenen Zeichen sein. Wenn man alle Angaben, die diese automatische Maschine definieren, aufschreibt, so entsteht eine „Verhaltenstabelle“ endlicher Größe, die alle Informationen enthält, unabhängig davon, ob die Maschine gebaut wurde oder nicht. Abstrakt gesprochen war die Maschine eine Tabelle bzw. die Tabelle war die Maschine [24]. Jede mögliche Tabelle definert eine Maschine mit einem bestimmten Verhalten. „Es gäbe somit unendlich viele mögliche, unendlich vielen möglichen Maschinen entsprechende Tabellen“([Hodges] S. 116). Alan Turing hatte, ausgehend von der Idee des „mechanischen Verfahrens“ etwas überaus Konkretes geschaffen: Eine „Verhaltenstabelle“. Das erlaubte nun ein neues Herangehen an das Enscheidungsproblem: Gibt es eine Verhaltenstabelle, die das Entscheidungsproblem löst?
Eine konkrete Verhaltenstabelle für das Entscheidungsproblem zu finden, war aussichtslos. Dafür war es zu komplex. Turing näherte sich der Lösung über einen anderen Weg. Seine Idee basierte auf den „berechenbaren“ Zahlen. Jede reelle Zahl, die durch eine bestimmte Regel definiert wird, kann durch eine der automatischen Maschinen berechnet werden. Ein Beispiel könnte die Dezimaldarstellung von π sein, denn dafür benötigt man lediglich Regeln für die Addition, Multiplikation, etc. Damit könnte die Maschine anfangen zu rechnen, so wie es auch in der Schule durchgeführt wird. Natürlich käme die Maschine zu keinem Ende, doch nach einer bestimmten Zeit hätte sie jede beliebige Dezimalstelle berechnet, wobei sie nur einen endlichen Bandbereich benutzt hätte.
Durch diese Übelegung hatte er eine Möglichkeit geschaffen, eine unendliche Dezimalzahl durch eine endliche Maschinentabelle darzustellen. Was mit π funktioniert, könnte auch mit $\sqrt{2}$ oder für $\log_6(8)$ oder durch eine Regel definierte Zahl funktionieren. All diese Zahlen nannte Turing „berechenbare Zahlen“. Wieviele berechenbare Zahlen gab es? Da es

[24] Ein Beispiel für die Verhaltenstabelle eines Addierers ist auf Seite 117 in [Hodges]. Die Multiplikation könnte durch fortgesetzte Addition definert werden. So könnten Maschinen auch Entscheidungen fällen indem sie feststellen, ob eine Zahl prim ist, oder nicht.

zu jeder berechenbaren Zahl eine Verfahrenstabelle gab, reichte es, wenn man die Anzahl der möglichen Tabellen bestimmt. Die Tabellen lassen sich aber in alphabetische Reihenfolge bringen und sind damit anzählbar unendlich groß. Die reellen Zahlen sind jedoch überabzählbar unendlich groß, wie Turing durch das Cantorsche Diagonalisierungsverfahren (siehe Abschnitt 2.3) wusste. Es gibt also irrationale Zahlen, die nicht durch seine Maschine ermittelt werden können. So wie also in Cantors Diagonalisierungsverfahren das Abzählbare das Überabzählbare entstehen lässt, so hatte Turing „aus dem Berechenbaren das Unberechenbare entstehen lassen“ ([Hodges] S. 120).
Turing verwendete Cantors Diagonalisierungsverfahren um zu zeigen, dass es nur abzählbar viele berechenbare reelle Zahlen gibt, im Gegensatz zu den überabzählbar vielen reellen Zahlen. Dazu muss nochmals genau auf die Argumentation Cantors geachtet werden. Im Beweis der Überabzählbarkeit wird eine Diagonalzahl erzeugt, die nicht in der Tabelle aller berechenbare Zahlen auftaucht. Die Definition dieser nicht enthaltenen Diagonalzahl ist jedoch vollkommen klar („Jede Diagonalziffer wird durch eine 1 ersetzt, nur wenn die Diagonalziffer 1 ist, wird statt dessen eine 2 geschrieben.“ siehe Seite 8). Warum sollte diese Zahl nicht durch eine Turing-Maschine berechnet werden können?
Solch eine „Cantor“-Maschine würde das Vorgehen bei der Bestimmung der Diagonalzahl immitieren. Sie würde zuerst mit einem leeren Band beginnen, dann die erste Tabelle erzeugen, diese ausführen, bei der ersten Ziffer anhalten, überprüfen, ob die erhaltene Ziffer gleich eins ist und wenn ja eine zwei, sonst eine eins aufs Band schreiben. Dann würde sie die zweite Tabelle erzeugen, diese ausführen, bei der zweiten Ziffer anhalten und eine eins oder zwei aufs Band schreiben. Es wäre möglich diesen Vorgang durch eine Turing-Maschine durchführen zu lassen. Allerdings dachte man bei Tabellen eher an eine zweidimensionale Struktur und die Frage ist, wie könnte man diese auf ein eindimensionales Band bringen? Sie müssten in Form von Zahlen verschlüsselt werden, ähnlich wie Gödel Formeln und Beweise in Zahlen dargestellt hatte. Diese Zahlen wurden von Turing „Beschreibungszahlen“ genannt, wobei es zu jeder Beschreibungszahl genau eine Turing-Maschine gibt. Ähnlich wie Gödel verwandte Turing hier die Idee, keinen Unterschied zwischen Zahlen oder Operationen mit Zahlen zu machen. Beides sind Symbole.
Eine solche Maschine könnte aus der Beschreibungszahl die Arbeitsweise einer anderen Maschine entschlüsseln und diese simulieren. Eine solche Maschine nannte Turing *„universelle“* Maschine.
Praktisch würden nicht alle natürlichen Zahlen auch Beschreibungszahlen sein. So wie auch nicht jede alphabetisch angeordnete Verhaltenstabelle eine sinnvolle Turing-Maschine sein musste. Das Problem war, dass man nicht sicher sein kann, ob die 7302te ordentlich definierte Tabelle auch die 7302te Ziffer hervorbringen würde. Oder ob die 7302te alphabetisch sortierte Maschine überhaupt eine Ziffer hervorbringt und nicht in einem sich immer wiederholenden Zyklus von Operationen gefangen wäre, ohne dass sie eine Ausgabe macht? Die Antwort darauf kommt dem Halteproblem (siehe S. 10) gleich[25]. Man kann es nicht vorhersagen, sondern nur ausprobieren. Dieses Ausprobieren jeder Tabelle dauert unendlich lange. Die Cantor-Maschine würde also nicht in endlicher Zeit eine Antwort für jede Stelle der Diagonalzahl liefern können. Eine Diagonalzahl konnte also nicht berechnet werden und das befürchtete Paradoxon blieb aus.
Turing nannte die Beschreibungszahlen, aus denen sich unendliche Dezimalzahlen erzeugen lassen, „zufriedenstellende“ Zahlen und es gab keine wohlbestimmte Methode, um *un*zufriedenstellende Zahlen zu identifizieren. Er hatte ein Beispiel erzeugt, dessen Existenz Hilbert bestritten hatte, ein unlösbares Problem.

[25]Eine lesenswerte Beschreibung dieser und weiterer Grenzen des Computereinsatzes findet sich in [Harel].

Alternativ konnte er auch mit Hilfe der Selbstbezüglichkeit zeigen, dass es keine Methode gab, die unzufriedenstellenden Zahlen zu eliminieren. Falls es eines solche Überprüfungsmaschine gab, die alle unzufriedenstellenden Zahlen entdeckte, so könnte sie auf sich selbst angewandt werden. Und das führte zu einem glatten Widerspruch ([Hodges] S. 122).
Damit hatte Turing Hilberts dritter Frage nach dem Entscheidungsproblem („Gibt es ein bestimmtes Verfahren, das die Wahrheit einer Behauptung überprüft?“) nicht nur den Todesstoß versetzt, sondern auch noch etwas Neues geschaffen, nämlich die Definition einer Maschine, die alles kann, was durch ein genau festgelegtes Verfahren beschrieben werden kann. Was allerdings noch zu beweisen wäre! Konnte die Turing-Maschine mit den Fähigkeiten Lesen, Schreiben, Löschen, Hin- und Herlaufen und Anhalten tatsächlich alles, um das zu tun, was durch ein „genau festgelegtes Verfahren“ beschrieben werden kann? Wenn diese Frage verneint wird, besteht die Möglichkeit, dass eine geschickte Erweiterung der Maschine ihr dir Möglichkeit gibt, neue Probleme zu lösen. Turing zeigte in diesem Zusammenhang, dass seine Maschine jede Zahl, „die im mathematischen Alltag“ vorkommt (nämlich der berechenbaren reellen Zahlen), auch erzeugen konnte und dass sie jede innerhalb von Hilberts Formulierung der Mathematik beweisbare Behauptung in Folge hervorbringen kann.
In seiner Arbeit rechtfertigte er seine Definition durch eine Betrachtung dessen, was Menschen überhaupt tun können, wenn sie eine Zahl durch Nachdenken und Aufschreiben von Informationen „berechnen“ ([Hodges] S. 123ff). Dadurch begründete er die Beschränkung seiner Maschinen auf ein endliches Repertoire von Zeichen. Er ging davon aus, dass die „Denkzustände von Menschen“ gezählt werden könnten[26] und dass das menschliche Gedächtnis beschränkt sei. Dadurch rechtfertigte er, dass alles was jemand, der eine Berechnung ausführt (Rechner genannt), tut, auch von seiner Maschine gemacht werden kann. Alle Denkzustände des menschlichen Rechners wurden durch eine Konfiguration der entsprechenden Maschine dargestellt. Diese Denkzustände sah Turing als eine Schwachstelle seines Beweises an und fügte deshalb noch eine alternative Begründung hinzu: Verlässt ein Rechner seinen Arbeitsplatz und unterbricht deshalb seine Berechnung, so muss er eine Notiz mit Anweisungen hinterlassen, damit er später seine Arbeit wieder aufnehmen kann, ohne zu vergessen, wie er seine Arbeit fortsetzt. Diese Notiz entspricht dann dem „Denkzustand“. Bei letzterem wird der Rechner als ein Ausführender von Anweisungen angesehen, während beim ersten Gedankengang der Schwerpunkt auf die Beschränktheit eines Individuums gelegt wird. „Beide Gedankengänge näherten sich dem Widerspruch zwischen freiem Willen und dem Determinismus, doch der eine tat es von der Seite des inneren Willens her, der andere von der Seite der äußeren Zwänge“ ([Hodges] S. 126).
Diese These der endlichen mentalen Zustände hatte Konsequenzen, denn es implizierte eine materielle Grundlage des Denkens. Das Jahr 1936 bedeutete einen Wendepunkt in Turings Überzeugung, die er nach dem Tod seines Freundes Chrisopher Morcom gewonnen hatte (siehe Brief auf Seite 18). Früher war er überzeugt von einem Weiterleben nach dem Tod und der fortdauernden Möglichkeit zur Kommunikation. Später bezeichnete er sich selbst als einen Atheisten und vertrat eine materialistische Auffassung.

[26] Was eine erstaunliche Behautpung war, denn in der Quantenmechanik konnten sich physikalische Zustände bliebig nahe kommen.

4.3 Der Turing-Test

Der Unterschied zwischen dem, was der menschliche Verstand tun kann, und dem, was eine Maschine zu tun in der Lage ist, beschäftigte Turing immer wieder[27]. Für das National Physical Laboratory schrieb er im Juli/August 1948 den Bericht *„Intelligent Machinery“*. Er war davon überzeugt, dass Maschinen auch intelligent sein können. Das Lernen war für ihn die entscheidende Fähigkeit, die die Maschinen noch brauchten.
Mit Michael Polanyi, einem ungarischen Emigranten, der einen Lehrstuhl für Sozialwissenschaften inne hatte, diskutierte er sehr ausführlich. Polanyi behauptete, dass die Funktion des Verstandes durch ein formales System „unspezifizierbar“ sei. Diese Formulierung war für Turing ebenso unbefriedigend, wie die bei einem Symposium geäußerte Meinung, der wesentliche Unterschied scheinte das fehlende Bewußtsein der Maschinen zu sein ([Hodges] S. 479). Turing schrieb eine wissenschaftliche Abhandlung *„Computing Machinery and Intelligenz“*, die in der philosophischen Zeitschrift *Minds* im Oktober 1950 abgedruckt wurde. Dort führte er, in seinem typischen Stil, die Idee einer Definition der Begriffe „Denken“, „Intelligenz“ oder „Bewußtsein“ durch ein geschlechtsspezifisches Ratespiel ein ([Hodges] S. 479):

> „Er stellte ein Spiel vor, in dem ein Fragesteller allein auf Grund schriftlicher Antworten entscheiden müsste, welche von zwei Personen in einem anderen Raum ein Mann und welche eine Frau sei. Der Mann sollte den Fragesteller betrügen und die Frau sollte ihn von der Wahrheit überzeugen.“

Von beiden bekäme der Fragesteller etwa Antworten wie „Der Andere lügt, ich bin die Frau“. Turing wollte durch dieses Spiel zeigen, dass ein erfolgreicher Betrug des Mannes nichts an der Tatsache ändert, dass der Mann ein Mann ist. Sein Geschlecht hing nicht von den Symbolsequenzen ab, die ausgetauscht wurden.
Im Gegensatz dazu war sein Ziel jedoch zu beweisen, dass sich ein solches Imitationsprinzip auf die Begriffe „Denken“ und „Intelligenz“ anwenden lässt. Wenn ein Computer einen Menschen auf Grund seiner gedruckten Antworten so gut imitieren kann, dass er nicht mehr von einem menschlichen Fragebeantworter unterschieden werden kann, so müsste man sagen, „er denkt“. Er argumentierte, dass es keinen anderen Weg gibt, festzustellen, ob eine andere Person „denkt“ oder „sich bewusst“ ist, als diese Person mit sich selbst zu vergleichen. Turing sah keinen Grund bei einem Computer anders vorzugehen.

5 Emil Post

Emil Leon Post wurde in Augustów (Polen) am 11. Februar 1897 geboren (Daten aus [Gottwald]). In New York studierte er am City College bis 1917 Mathematik, ging dann aber für seine Promotion an die Columbia Universtität. Anschließend unterrichtete er an Hochschulen in New York Mathematik, bis er ab 1935 am City College arbeitete. Er starb am 21. April 1954 in New York.
Emil Post war einer der wenigen, die Turings Arbeit *„On computable Numbers“* zu Beginn mit professionellem Interesse lasen. Er hatte seit Anfang der 20er Jahre schon einige von Gödels und Turings Ideen vorweggenommen, diese aber nicht veröffentlicht (siehe [Hodges] S. 147). Im Oktober 1936 reichte er eine Arbeit für die Zeitschrift *Journal of Symbolic* ein, die Church mit herausgab. Darin wurde eine Methode vorgeschlagen, die

[27] Seine Entwicklung und Argumentation hier nachzuvollziehen, ist kaum möglich. Einen Einblick erhält man in [Hodges] (besonders auf den Seiten 434ff und 478ff).

eine Präzisierung dessen bewirkte, was es bedeute „ein allgemeines Problem zu lösen“. Dabei bezog er sich auf Churchs Lösung des Hilbertschen Entscheidungsproblems (siehe Abschnitt 6.2), die die Annahme benötigte, dass jedes „genau festgelegte Verfahren“ sich auch als Formel in seinem λ-Kalkül darstellen lässt. Zur Lösung der unbefriedigenden Argumentation schlug Post vor, dass unter einem „genau festgelegten Verfahren“ eines zu verstehen sei, das man einem „verstandslosen“ Arbeiter in Form von Anweisungen gibt, der an einer Reihe von „Boxen“ arbeitet. Dazu sollte man nur von folgenden Fähigkeiten ausgehen ([Hodges] S. 147): Markieren einer Box, Löschen einer Markierung, zur linken Box gehen, zur rechten Box gehen und erkennen, ob die Box, vor der er steht, leer ist oder nicht.
Posts „Arbeiter“ hatten damit genau die gleichen Fähigkeiten wie Turings Maschine. Auch die Anweisungsinterpretation in beiden Veröffentlichungen ist gleich. Der Ursprung des Bildes dieser Idee kommt wohl von der Fließbandarbeit, war aber unabhängig von Turings Veröffentlichung entstanden. Posts Beitrag schloss die konzeptionelle Lücke in der Arbeit von Church, allerdings war weder von „Denkzuständen“ oder Hilberts Entscheidungsproblem noch von einem „universellen Arbeiter“ die Rede. Interessant ist nur, dass auch ohne Alan Turing die Idee in einer anderen Form entstanden wäre, da sie eine „notwendige Brücke zwischen der Welt der Logik und der Welt, in der Menschen handeln“ (aus [Hodges] S. 148) bildet.

6 Alonzo Church

6.1 Kurzbiographie

Am 14. Juni 1903 wurde Alonzo Church in Washington D.C. geboren (Daten aus [Gottwald]). Er studierte ab 1920 Mathematik in Princeton und erwarb 1927 dort auch den Doktortitel. Nach Studienaufenthalten an der Harvard Universität, in Göttingen und Amsterdam arbeitete er von 1929 bis 1967 in Princeton als Professor. Anschließend ging er nach Los Angeles wo er bis 1990 lebte. Church starb am 11. August 1995 in Hudson, Ohio.

6.2 Das λ-Kalkül

Church entwickelte das λ-Kalkül (Lambda-Kalkül) zusammen mit Stephen Kleene, einem späteren Mitarbeiter. Eigentlich war es nur ein Teil eines viel größeren Programms. Es sollte als Grundlage dienen, für die gesamte Logik und Mathematik [28]. Da sich allerdings Paradoxien aufgrund von Inkonsistenzen nicht haben aufklären lassen, konnte das große Ziel nicht erreicht werden. Doch der konsistente Teil diente für die Berechenbarkeitstheorie (siehe Abschnitt 2.4) erfolgreich als Grundlage. Das λ-Kalkül betont Funktionen als Regeln zur Berechnung zu begreifen, statt sofort die zweistellige Relation eines Graphen darin zu sehen.
Kleene zeigte 1936, dass das λ-Kalkül äquivalent zu den rekursiven Funktionen ist und bereitete damit die Grundlage für die erste Formulierung der Churchschen These. Es stellt einen Formalismus dar, der alle Formen der Arithmetik in eine Standardform bringen kann. Das Beweisen von Theoremen innerhalb dieses Formalismus besteht in der Umwandlung einer Kette von Symbolen mittels einfacher Regeln. Um einen Eindruck über den Formalismus zu erhalten, sind hier wenige Grundzüge skizziert (Angaben aus

[28] Einen Überblick über diesen gescheiterten Versuch und das Kleene-Rosser-Paradoxon gibt die Einleitung von [Barendregt].

[Penrose]):
Eine Funktion $f(x)$ wird dargestellt, indem der Buchstabe x mittels des Buchstabens λ als Platzhalter für alles steht, was nach der Funktion angegeben ist:

$$\lambda x.[fx].$$

Freie und gebundene Variablen werden damit deutlich voneinander unterschieden. Damit der Funktionswert von a ermittelt wird, schreibt man $(\lambda x.[fx])a = fa$. x wird zur gebundenen, a zur freien Variablen. Eine Funktion f(x) $= x^2 + 3x - 1$ würde im λ-Kalkül definiert werden durch: f= $\lambda x.[x^2 + 3x - 1]$.
Besonders interessant sind die Ausdrücke, die direkt aus den elementaren Funktionsoperationen von Church bestehen. Beispielsweise ist $\lambda f.[f(fx)]$ gerade die Funktion, die bei Anwendung auf eine andere Funktion g die zweimal iterierte Anwendung von g auf x erzeugt:

$$\lambda f.[f(fx)] = g(gx).$$

Diese Funktion identifizierte Church mit der natürlichen Zahl 2. Analog werden die Zahlen 3, 4, etc. definiert. Dabei bedeuten diese Zahlen genaugenommen zweimal, dreimal etc.
Als ein Beispiel für die Arbeit mit dem λ-Kalkül wird die Addition von 1 durch folgende Operation S definiert:

$$S = \lambda abc.[b((ab)c)].$$

Um zu sehen, dass dies tatsächlich funktioniert, wird die Funktion auf 3 angewendet:

$$S3 = \lambda abc.[b((ab)c)]3 = \lambda bc.[b((3b)c)] = \lambda bc.[b(b(b(bc)))] = 4 \qquad ,$$

da $(3b)c = b(b(bc))$ die dreifache Iteration der Funktion b auf die Eingabe c bedeutet.

Church konnte nun zeigen, dass die Frage, ob eine Symbolkette in eine andere umgewandelt werden kann, in der Art unlösbar war, dass es keine entsprechende Formel des λ-Kalküls gibt. Nun konnte auch gezeigt werden, dass Hilberts Frage nach der Entscheidbarkeit ebenfalls ein unlösbares Problem darstellte. Allerdings war die Äquivalenz von „Es exisitert eine Formel des λ-Kalküls“ und „Es existiert ein genau festgelegtes Verfahren“ keineswegs offensichtlich. Church untermauerte dies nur durch verbale Argumente.
Für die Entwicklung der Programmiersprachen brachte das λ-Kalkül eine Reihe von prägenden Ideen. Beispielsweise wurden hier gebundene Variablen eingeführt, die sich in den Parameterübergaben der Prozeduren wiederfinden. Trotz ihrer einfachen Syntax kann durch die Äquivalenz zur Berechenbarkeit der Turing Maschine alles mit dem λ-Kalkül ausgedrückt werden, was durch eine Maschine berechnet werden kann. In der Programmiersprache LISP (LISt Processing), eine Programmiersprache, deren wichtigste Datenstruktur lineare Listen sind und die hauptsächlich im Bereich der Künstlichen Intelligenz eingesetzt wird, finden sich Elemente des λ-Kalküls am deutlichsten wieder. Weitere im λ-Kalkül enthaltene Grundeigenschaften einiger Programmiersprachen, beispielsweise die parallele Bearbeitung von Funktionen, werden in [Barendregt] angesprochen.

6.3 Die Churchsche These

Beim Beweis der Unvollständigkeitssätze benutzte Gödel die primitiv rekursiven Funktionen (siehe Seite 14), die aber zu eng für den intuitiven Berechenbarkeitsbegriff waren (Ackermann-Funktion und Fussnote auf Seite 14). Steven Kleene definierte daher den μ-Operator, mit dem er den Berechenbarkeitsbegriff auf alle rekursiven Funktionen ausdehnte. Dieser Operator liefert die kleinste natürliche Zahl, die eine Formel erfüllt. Praktisch bedeutete dies, dass man jede natürliche Zahl der Reihe nach ausprobiert. Das ist sicherlich nicht effektiv berechenbar, da man nicht sicherstellen kann, dass die Formel ein Ergebnis liefert. Vom zeitlichen Aspekt, der Effizienz, ist es erst recht nicht optimal. Vom

theoretischen Standpunkt aus ist dies jedoch irrelevant.
Die Mittel der primitiven Rekursionen wurde erheblich erweitert, da Kleene bewies, dass sich jede μ-rekursive Funktion durch zwei primitiv-rekursive Funktionen ausdrücken lässt (siehe [Schöning]). Schon dies war ein überraschendes Ergebnis, das Church im Kreise seiner Kollegen von einer These der Gleichheit aller Berechenbarkeitsmodelle sprechen lies. Gödel hingegen war bezüglich der formalen Beschreibung der Berechenbarkeit sehr skeptisch. Erst als er 1937 Turings Ergebnisse las, wurde ihm die Bedeutung seiner und Churchs Arbeiten bewusst[29].
Nachdem Alan Turing bei der Veröffentlichung seiner Arbeit die Äquivalenz seines Berechenbarkeitsbegriffs zu dem des λ-Kalküls gezeigt hatte (siehe Seite 18), standen drei unabhängig erzielte, aber gleichwertige Berechenbarkeitsbegriffe nebeneinander. Gödel mit den rekursiven Funktionen, Churchsches λ-Kalkül und Turings Maschine. Diese sehr unterschiedlichen Formalismen gingen alle vom intuitven Berechenbarkeitsbegriff aus und scheinen mit ihm überein zu stimmen. Noch im gleichen Jahr (1936) formulierte Church seine These (aus [Asteroth] S. 75):
„Die durch die formale Berechenbarkeitsbegriffe (z.B. Turingberechenbarkeit) erfasste Klasse von berechenbaren partiellen Funktionen stimmt genau mit der Klasse der intuitiv berechenbaren partiellen Funktionen überein.“[30]
Durch die Arbeit anderer Forscher wurden weitere Berechenbarkeitsbegriffe erarbeitet, beispielsweise von Post und Andrej Andrejewitsch Markow (1856-1922). Die nachgewiesene Äquivalenz zu der Berechenbarkeit von Gödel, Church, Turing untermauerte die Churchsche These. Neben der Äquivalenz scheint dieser Satz auch eine Grenze für die Allgemeingültigkeit der Berechenbarkeit anzugeben. Offenbar gibt es keine Möglichkeit, einen Mechanismus zu erstellen, der mehr kann, als das, was eine Turing-Maschine zu leisten in der Lage ist. Kein allgemeineres Schema berechnet eine Funktion, die nicht rekursiv ist, und es gibt keine effektive Prozedur, die nicht im λ-Kalkül ausgedrückt werden kann ([Dewdney] S. 471). Umgekehrt wird ein Versagen eines Schemas, wie bei Turings Halteproblem, bei allen zu einem Versagen führen.

7 John von Neumann

Aber wehe, wenn Jáncsi aus Budapest
anfängt zu denken!
Unerbittlich tickt unter der Schädeldecke
sein weicher Prozessor,
ein Flimmern geht durch den Datenspeicher
und blitzartig wirft er ballistische Gleichungen aus.

aus *„John von Neumann“* in [Enzensberger] S. 42

Drei Tage nach Weihnachten wurde John von Neumann am 28. Dezember 1903 als Janos Neumann in Budapest geboren[31]. Für Freunde und Bekannte war er in Amerika stets „Johnny“, so wie er in Ungarn „Jánsci“ genannt wurde. Jánscis Vater Max arbeitete ab 1910 als Ratgeber der Regierung in Fragen der Wirtschaft. Als Dank erhielt er 1913 einen erblichen Adelstitel, so dass die Familie sich seit dem „von Neumann“ nennen konnte.
Neumann war ein Wunderkind und genialer Wissenschaftler. In der theoretischen und

[29] Eine detailliertere Darstellung der zeitlichen Entwicklung findet sich in [Davis].
[30] Unter einer partiellen Funktion versteht man eine Funktion $f : A \to B$ die manchen Elementen $a \in A$ einen Funktionswert $f(a) \in B$ zuordnet. Eine totale Funktion ordnet jedem Element aus A genau einen Funktionswert aus B zu ([Asteroth] S. 13).
[31] Die Daten stammen aus [Macrae].

angewandten Physik, der Spieltheorie, Mathematik, Biologie, Ökonomie und Meteorologie hinterließ er bedeutende Spuren und seine Mitarbeit an der Entwicklung sowie dem Einsatz des digitalen Computers läßt ihn als „Vater aller Computer“ erscheinen.
Nicht zuletzt verfügte er zu Beginn des Kalten Krieges als Berater der US-Regierung über großen Einfluss. Dabei trat er als Vertreter der Abschreckungspolitik auf.

7.1 Biographie

Als erster Sohn jüdischer Eltern wurde Janos Neumann in einer Stadt geboren, die sowohl kulturell als auch wirtschaftlich florierte. Die Liberalität Budapests zog viele Juden an, die sich dort durch eine gute Ausbildung wohlhabende Verhältnisse erarbeiten konnten. Die Schulen hatten einen außerordentlich guten Ruf, so dass auch eine fundierte Schulbildung gesichert war.
Im Hause der Familie von Neumann wurde die Zeit bis zum Schulbeginn mit dem zehnten Lebensjahr genutzt. Kindermädchen, Erzieherinnen und Vorschullehrer betreuten die Kinder, so wie es sich zu dieser Zeit für eine Familie des gehobenen Mittelstandes gehörte. Dabei fielen dem Vater die ungewöhnliche Begabung Jánscis mit Zahlen auf, sodass er bei der Auswahl der Vorschullehrer auf fundierte Mathematikkenntnisse achtete. Zusammen mit Latein und Griechisch erhielt Jánsci eine vielsprachige und multikulturelle Erziehung, die ihm ohne Anstrengungen die Schulmathematik vermittelte, noch bevor die Schule für ihn überhaupt begann. Allabendlich gab es in der Familie die Gepflogenheit, am Speisetisch Themen anzusprechen, mit denen man sich tagsüber beschäftigt hatte und die die ganze Familie gemeinsam analysierte. Diese „Tischseminare“ behandelten allzuoft nichttriviale Themen, wie unterschiedliche industrielle Modelle, die Jánscis Vater als leitender Angestellter einer Bank finanzierte, oder naturwissenschaftliche Bereiche, mit denen Jánsci in der Schule oder aus eigenem Interesse zu tun hatte. So lernte er frühzeitig frei zu argumentieren und auch vor Gästen zu sprechen.
Von 1914 bis 1921 besuchte Jánsci das Lutheraner-Gymnasium, was eines der besten Schulen von Budapest war. Ein Jahr zuvor war bereits der spätere Nobelpreisträger für Physik (1963), Eugen Wigner, in das gleiche Gymnasium eingetreten. Seinem Schulmeister Ratz fielen sofort die fundierten mathematischen Kenntnisse auf, und nach Rücksprache mit den Eltern erhielt Jánsci eine zusätzliche mathematische Ausbildung an der Unversität. Noch bevor er das Gymnasium abgeschlossen hatte, war er an der Universität als Kollege akzeptiert und seine erste Veröffentlichung wurde eingesandt, als er 17 Jahre alt war.
Außergewöhnliche Konzentrationsfähigkeit begleitete die Intelligenz des John von Neumann. Wigner war mit von Neumann seit der Schulzeit freundschaftlich verbunden. Ein Journalist namens Kuhn, der Wigner später interviewte, fragte ihn dabei, ob er ein gutes Gedächtnis habe.

> „*Es ist nicht so gut wie das von Neumanns*, antwortete Wigner. Kuhn meinte bald darauf, es müsse eine niederschmetternde Erfahrung gewesen sein, zusammen mit von Neumann aufgewachsen zu sein, unabhängig davon, wie klug man ist“ (Zitat aus [Macrae] S. 70).

Während seiner gesamten Schulzeit versuchte Jánsci, nicht abseits seiner Kameraden zu stehen. Er schaffte es aber nicht, die Lockerheit im Umgang mit ihnen zu erreichen. Wie auch später hatte er schon in der Schulzeit die Angewohnheit, eine Antwort, wenn er sie hatte, auch sofort direkt zu geben. Er machte sich nicht unbeliebt, wurde aber nie „einer von ihnen“ und nahm daher häufig die Rolle eines Zuschauers ein.

Das Studium war mindestens genauso ungewöhnlich wie seine Schulzeit. Vor allem zur finanziellen Absicherung sollte er zunächst in Berlin, dann in Zürich Chemie studieren. Um einen weniger jüdisch klingenden Namen zu haben, nannte er sich ab diesem Zeitpunkt von Neumann. An der Universität Berlin besuchte er jedoch nur einen zweijährigen Chemiekurs ohne Abschluss, um damit Chemiekenntnisse nachweisen zu können. Danach wandte er sich 1923 nach Zürich an die Eidgenössische Technische Hochschule (ETH). Während Einstein die Eingangsprüfung für die ETH im ersten Anlauf nicht bestand, hatte von Neumann unter Auslassung des ersten Jahres keine Probleme mit dem Eingangsexamen des zweiten Jahres.
Parallel zum Chemiestudium schrieb er sich an der Universität in Budapest als Doktorand im Fachbereich Mathematik ein. Seine Arbeit machte ihn schon vor der Veröffentlichung bekannt, da sie sich mit dem Titel *„Der Axiomatisierung der Mengenlehre“* direkt mit der Speerspitze der aktuellen Diskussion beschäftigte. Noch keine 23 Jahr alt hatte er zwei akademische Abschlüsse und mit einem Stipendium der Rockefeller-Stiftung wandte er sich 1926 nach Göttingen, dem Zentrum der Mathematik, wo Hilbert schon auf ihn wartete.
Mit Werner Heisenberg besaß Göttingen einen Pionier der Quantenmechanik. Von Neumann brachte die sich scheinbar widersprechenden Ergebnisse von Heisenberg und Schödinger in eine einheitliche mathematische Form, indem er sich der Hilbert-Räume bediente. Bis Ende 1927 hatte er 12 bedeutende Artikel veröffentlicht, bis Ende 1928 waren es 22 und bis Ende 1929 bereits 32[32]. In Göttingen blieb er aber nur knapp über ein Jahr, da er dann in Berlin und schließlich in Hamburg jeweils für kurze Zeit Dozentenstellen inne hatte. Aufgrund seiner enormen Arbeitsleistung von etwa einem bedeutenden Artikel pro Monat gab es um ihn bald eine Art wissenschaftlichen Kult. Im Rahmen seiner Vortragsreisen durchquerte er ganz Europa.
Im Sommer 1929 machte er Mariette Kovesi, einer langjährigen Bekannten, einen Heiratsantrag. Kurz darauf erhielt er das Angebot eines Lehrauftrages für ein halbes Jahr in Princeton. So heiratete er am Neujahrstag 1930 die lebenslustige 20-jährige Mariette und die Hochzeitsreise ging mit dem Luxusdampfer nach New York. In der zweiten Jahreshälfte kam von Neumann für einige Monate nach Berlin zurück, um Vorträge zu halten. Legendär waren jedoch die Parties der von Neumanns in Princeton. Während seines Studiums war von Neumann die lebhaften Diskussionen in den Kaffeehäusern gewohnt und etwas davon versuchte er auch hier aufzubauen. In Princeton führten sie die isoliert lebenden Wissenschaftler zusammen, so dass die Parties auch als Treffpunkt und Arbeitsmarkt hochkarätiger von Deutschland ausgewanderter Wissenschaftler fungierten. 1935 kamen eine Tochter zur Welt, doch das Familienglück hielt nicht lange. 1937 wurde die Ehe mit Mariette geschieden.
Auf einer Reise nach Budapest 1937 lernte er Klari Dan kennen, die er im darauf folgenden Jahr heiratete. Zu dieser Zeit war sich von Neumann bereits sicher, dass es in Europa Krieg geben würde. Schon 1940, noch vor dem Kriegseintritt Amerikas, arbeitete er als wissenschaftlicher Berater des Ballistic Research Laboratory. Insbesondere bei der Berechnung von Schockwellen von Explosionen tat er sich hervor. 1943 reiste er nach England, wo er für etwa ein halbes Jahr mit den Briten bei der Untersuchung von Explosivstoffen und Bombardierungsmustern zusammenarbeitete. Zurück in Amerika wurde er zum Manhattan Projekt in Los Alamos hinzu gezogen, um insbesondere mathematischer Modell für die Beschreibung der Einzelvorgänge der nuklearen Explosion zu entwerfen. Hier gab es eine Unmenge an Berechnungen durchzuführen, wobei die Schreibtisch-Rechenmaschinen die einzige Unterstützung waren, bis 1944 IBM-Lochkartensortierer angeschafft wurden.

[32] Zahlen aus [Macrae] S. 129.

Damit konnten massivere Probleme mit Hilfe nummerischer Näherungen angegangen werden. Insbesondere bei der Entwicklung der Linsenwirkung bei ber Fat-Man-Bombe, die später auf Nagasaki abgeworfen wurde, half von Neumann mit.
Nach der Kapitulation Japans war von Neumann überzeugt, dass es Krieg mit Russland geben werde, und so war er auch an der Entwicklung der Wasserstoffbombe beteiligt.
Neben seinen Errungenschaften in der Ökonomie, die hier unerwähnt bleiben müssen, arbeitete er bei der Entwicklung der Computer mit (siehe nächster Abschnitt). Durch die Entwicklung der Computer rückte außerdem die Wettervorhersage mit Hilfe von Gleichungen und Berechungen in Reichweite. Von Neumann interessierte sich dafür und förderte die Meterologie. Sie bekam dadurch eine enorme Unterstützung.
In den Fünfziger Jahren erhielt John von Neumann, wie er sich seit seiner Einbürgerung nannte, Berufungen in verschiedene Beratergremien der Truman- und Eisenhower-Regierungen, so dass er über einigen Einfluss verfügte. Als Vertreter einer offensiven Abschreckungspolitik setzte er sich maßgeblich für die Raketenentwicklung ein.
Am 11. August 1955 lautete die Diagnose bei einer Röntgenuntersuchung: Krebs. Unter beträchtlichen Schmerzen starb John von Neumann am 8. Februar 1957.

7.2 Die Entwicklung des „Von-Neumann“-Computers

Die Dokumentationslage zur historischen Entwicklung der Computer ist außerordentlich gut. Zahlreiche Veröffentlichungen beschäftigen sich damit. Eine Zusammenfassung findet sich unter anderem in [Macrae] und [Troitzsch]. In diesem Rahmen wird daher nur soweit auf die Entwicklung eingegangen, wie es notwendig ist, um von Neumanns Beitrag einordnen zu können.
Die Notwendigkeit, Maschinen mit immer größerer Rechenkapazität zu entwicklen, entsprang nicht nur wissenschaftlichen Fragestellungen, sondern immer auch aus konkreten Anforderungen. Beispiele für rechenintensive Aufgaben fanden sich besonders im Umgang mit neuen Entwicklungen: Im ersten Weltkrieg flogen die Granaten fast doppelt so weit, wie zunächst berechnet. Das lag an der mit zunehmender Höhe dünner werdenden Luft. Die Wissenschaft der Artillerieballistik wurde neu gegründet und die Mathematiker sollten dabei nichtlineare Gleichungen lösen, welche die Bewegung des Geschosses durch Luft mit wechselnder Dichte beschrieben. Eine ähnliche Situation ergab sich auch bei der mathematischen Beschreibung von Explosionen und den dadurch erzeugten Schockwellen, Turbolenzen in der Hydrodynamik, wie sie vielfältig in der Luftfahrt und der Wettervorhersage auftauchen.
Die Erstellung von Schusstafeln war von höchstem militärischem Wert. Schusstafeln sagten dem Schützen, in welchem Winkel er sein Geschütz ausrichten muss, um sein Ziel zu treffen. Die dabei auftretenden Gleichungen wurden, damit sie überhaupt gelöst werden konnten, ohne Rücksicht auf die tatsächlichen Vorgänge vereinfacht. Als sich in den 30er Jahren von Neumann dafür zu interessieren begann, gab es für ein typisches Geschütz eine Feuertabelle mit rund 3000 möglichen Geschossbahnen, wobei für jede Flugbahn ca. 750 Multiplikationen durchgeführt werden mussten. Unter anderem mussten Zünder- und Granatentyp, Untergrund, und eine Vielzahl weiterer Parameter berücksichtigt werden. Bei beweglichen Zielen war es noch erheblich schwieriger. Verzweifelte Beobachter befürchteten, dass man für jede korrekte Winkelbestimmung etwa zwei Jahre bräuchte ([Macrae] S. 168).
Innerhalb des Manhattan-Projekts in Los Alamos wurden die meisten Berechnungen bis 1943 mit Schreibtisch-Rechenmaschinen durchgeführt, ehe man ab 1944 Lochkartensortierer einsetzte. Da die Möglichkeit zur experimentellen Überprüfung der Überlegungen nicht

zur Verfügung standen, wurde die Bedeutung mathematischer Modelle um so größer. Gerade dabei leistete von Neumann einen wichtigen Beitrag. Das mathematische Team zeigte, dass physikalische Elemente eines Systems durch Zahlen repräsentiert werden können und sie die Experimente zumindest teilweise ersetzen. Insbesondere der Implosionsverlauf der Bombe war dabei wichtig. Durch die Ankunft der Lochkartensortierer war es möglich, die Probleme mit „brutaler Gewalt“ ([Macrae], S. 207), das heißt durch realistischere und damit numerisch umfangreichere Arbeit, zu lösen.
Von der Entwicklung des Moore Schools's Electronic Numerical Integrator and Computer (kurz ENIAC) erfuhr von Neumann erst im August 1944 von Herman Goldstine auf einem Bahnhof. Goldstines mathematische Fähigkeiten wurden von der Ballistikabteilung der Armee 1942 genutzt, um zu untersuchen, warum ihr Differentialanalysator schlechter arbeitete, als zu erwarten war. Dies war besonders dramatisch, da das Bedienungsteam zwar in mehreren Schichten rund um die Uhr arbeitete, jedoch bis zu drei Monate mit komplizierten Rechnungen beschäftigt war, pro Tag aber sechs neue Anforderungspläne eintrafen. Goldstine schlug einerseits verschiedene Verbesserungen vor, andererseits entdeckte er den Ingenieur Presper Eckert, der bald jede Nacht an dem Differenzialanalysator verbrachte. Durch die Arbeit der beiden wurde die Maschine etwa zehn Mal schneller und rund zehn Mal genauer. Tortzdem war abzusehen, dass sie den Rückstand an Schusstabellen nicht aufholen konnten. Im Herbst 1942 schlug der Mathematiker John William Mauchly, der ebenfalls an dem Projekt mitarbeitete, vor, einen elektronischen Computer zu konstruieren, der aufgrund viel kürzerer Schaltzeiten ein vielfaches schneller sein sollte[33]. Mauchly sprach zuvor mit dem damals unbekannten John V. Atanasoff, einem Mathematikprofessor am Iowa State College, dem die Idee auch gekommen war, allerdings an der Umsetzung scheiterte. Im Frühjahr überzeugte Goldstine die Armeeführung von dem Projekt, so dass im Mai 1943 mit der Planung und dem Bau der ENIAC begonnen wurde.
Die Kritiker dieses Projektes waren von der Einsatzbereitschaft nicht überzeugt. Die Ausmaße waren jedoch beeindruckend: Länge 33m, Höhe 3m, Tiefe 1m. Etwa 17.000 Vakuumröhren, 70.000 Widerstände, 10.000 Kondensatoren und 6.000 Schalter sollten das Innenleben bilden. Fermi, der die Anfälligkeit der Vakuumröhren kannte, meinte dazu, man müsse von Glück reden, wenn elektronische Computer jemals länger als 10 Sekunden arbeiteten. Eckert reduzierte die Fehleranfälligkeit, indem er bei den Röhren darauf achtete, dass sie bei maximal 50 % der angegebenen Plattenspannung betrieben wurden. Ähnliche Vorschriften erließ er auch für die anderen Komponenten. So konnte der Ausfall an Vakuumröhren auf zwei bis drei pro Woche reduziert werden. Der entscheidenste Nachteil der ENIAC war jedoch das Fehlen eines geeigneten Gedächtnisses. Sobald der Apparat für ein neues Problem programmiert werden musste, waren Operateure lange mit dem Umstöpseln von Kabeln und dem Bedienen von Schaltern beschäftigt.
Als Goldstine von Neumann auf einem Bahnsteig in Aberdeen ansprach und von dem ENIAC in Philadelphia erzählte, war von Neumann absolut begeistert. Fortan beschäftigte er sich auch damit. Als mathematischer Logiker analysierte er den Aufbau der Maschine und sofort fielen ihm Ideen ein, wie sie verbessert werden konnte. Alle Verbesserungen sollten in den Nachfolger der ENIAC, dem EDVAC (Electronic Discrete Variable Compu-

[33]Die Differentialanalysatoren waren die „letzten elefantesken Typen mechanisierter Rechenschieber“ ([Macrae] S. 243), da sie aus 150 Motoren, 320 Kilometer Draht, mehreren Tausend Relais und einem komplizierten Druckwerk bestanden, mit einem Gewicht von etwa einer Tonne. Für jedes Problem musste jeder Hebel und jedes Rad präzise neu eingestellt werden. Das war eine komplizierte und langwierige Angelegenheit. Bei der Berechnung schloss sich ein Relais in etwa $\frac{1}{5000}$ Sekunde. Bei den in der ENIAC eingesetzten Vakuumröhren ging der Schaltvorgang mindestens 1000 Mal schneller.

ter) realisiert werden. In einem Brief Goldstines vom 2. September an Paul Gillon, einen Oberst der Armeeballistik, wird von dem Vorschlag einer zentralen Programmiereinheit gesprochen. Die Idee von einem gespeicherten Programm war geboren. Innerhalb weniger Wochen hatte von Neumann zusammen mit Eckert sehr konstruktiv die Entwicklung von Computern mit Speicherprogrammen hervorgebracht. Trotz der Unverzichtbarkeit Einzelner für Teile des Projektes, so urteilte Goldstine, war für das Gesamtprojekt nur von Neumann von entscheidender Bedeutung. Entgegen der Meinung seiner Kritiker beschäftigte sich von Neumann mit Details, wie sie in einem Brief von Neumann an Goldstine vom 2. Februar 1945 deutlich werden ([Macrae] S. 251).

> „Wie Sie sich erinnern werden, treten beim Eingeben von Daten zwei Typen von Zahlen auf: binäre ganze Zahlen x, y, die Positionen im Speicher bezeichnen und andere Binäre, die von einem menschlichen Operateur eingetippt werden müssen und von der Maschine als Dezimalzahlen aufgenommen und auch als solche ausgedruckt werden ... Was die x, y betrifft, hatten wir unsere Zweifel. Da sie logische Kontrollfunktionen haben, ist es unangenehm, sie konvertieren zu müssen. Ich habe dafür plädiert, x, y stets in binärer Form einzugeben, doch wir kamen schließlich überein, dass Binäre für Menschen schwerer zu handhaben und zu erinnern sind. Dabei haben wir meiner Meinung nach eine klar auf der Hand liegende Lösung übersehen: nämlich x, y außerhalb der Maschine im oktalen (Basis 8) System auszudrücken ...“

Goldstine forderte von Neumann im Frühjahr 1945 auf, einen Bericht über das logische Gerüst der EDVAC zu schreiben. Er fertigte den *„First Draft on a Report on the EDVAC“*(Erster Entwurf eines Berichts über den EDVAC) im März an und die 101 seitige Veröffentlichung löste sehr unterschiedliche Reaktionen aus. Goldstine war so besgeistert, dass er Kopien an alle verschickte, die darum baten. Darunter war auch Alan Turing, der in England an ähnlichen Projekten arbeitete. John von Neumanns Name war jedoch der einzige, der auf dem Papier vermerkt war. Dieses Schreiben war eigentlich als internes Arbeitspapier gedacht, wurde aber auf der ganzen Welt als Inspiration und Anleitung für Nachbauten verwendet. Dagegen waren Eckert und Mauchly von dem *First Draft* weitaus weniger begeistert, da sie in diesem Bericht keine Erwähnung fanden, obwohl ihre Ideen mit dargestellt waren. Von Neumann hatte sie zwar in eine andere Form gebracht, doch die physikalischen Strukturen und die interne Logik änderte sich dadurch nicht. Da sie die Entwicklung der Computer voraussahen, befürchteten sie keinen Anteil an den Früchten ihrer Arbeiten zu erhalten. So schalteten sie ihre Rechtsanwälte ein. Noch vor der Fertigstellung spaltete sich das Entwicklerteam auf. Eckert und Mauchly arbeiteten, mit wenig Erfolg, in einer eigenen Firma weiter. Deren Nachfolger klagten weiter bis 1973, wobei das Urteil verkündete, dass die erste Idee von Atanasoff stammt und von Neumanns *First Draft* diese nur öffentlich gemacht hat.
Der Bericht über den EDVAC enthielt vor allem zwei Konzepte, welche die Computertechnik bis heute bestimmen und die Von-Neumann-Architektur der Computer ausmachen ([Troitzsch] S. 438):

- Es existiert lediglich eine zentrale arithmetische Operationseinheit mit Akkumulator. Damit werden Operationen nacheinander durchgeführt, im Gegensatz zur parallel arbeitenden ENIAC.

- Das Programm wird elektronisch gespeichert, so dass es im Laufe der Berechnungen auch verändert werden kann.

Überall auf der Welt begann man das Konzept der EDVAC nachzubauen. Der erste Rechner nach diesem Modell waren der SSEC (Selective Sequence Electronic Calculator) von IBM im Jahre 1948 und der Electronic Delay Storage Automatic Computer (EDSAC) in Cambridge im Juni 1949. Der EDVAC wurde erst zwei Jahre später in Betrieb genommen.
Für die Speicherung schlug Eckert eine Idee vor, die er schon bei einem Radarprojekt eingesetzt hatte. Da sich elektrische Pulse durch eine Flüssigkeit langsamer bewegen als durch Draht, konnte er durch eine Quecksilber-Verzögerungs-Vorrichtung einige Pulse so verzögern, dass sie wie ein Speicher wirkte. Von Neumann favorisierte hingegen eine Lösung mit Kathodenstrahlröhren.
Nach dem Krieg arbeitete von Neumann am IAS an der Entwicklung der Computer weiter. Weit wichtiger als die ingenieurtechnische Arbeit an den Computern waren von Neumanns theoretische Überlegungen zur Verbesserung der Architektur und der Programme. Während der Bau des eigenen Computers nur langsam voran ging, widmete sich ein kleines Team um von Neumann und Goldstine der logischen Konzeption des Computeraufbaus. Es etablierte sich durch Veröffentlichungen von Aufsätzen als die „von-Neumann-Architektur“. Insbesondere das Gedächtnis wurde Gegenstand eingehender Überlegungen. Ideal wäre ein Gedächtnis mit unbegrenzter Speicherfähigkeit und uneingeschränktem RAM-Zugriff (RAM = random access memory). Von Neumann betonte jedoch, dass dieses Ziel niemals erreicht werden könnte, aber jeder Schritt sollte diesem Ziel etwas näher kommen. Es wurde eine Hierarchie von Gedächtnissen entwickelt: Zuerst ein kleiner Primärspeicher mit schnellem RAM-Zugriff, gefolgt von einem Sekundärspeicher, der gegebenenfalls automatisch Daten in den Primärspeicher weiterleiten sollte. Nachfolgend wurde noch ein inaktiver Speicher angedacht.
Als der Computer des IAS schließlich funktionierte, gab es eine Reihe von Problemen, die immer noch zu viele Stunden Berechnungszeit forderten. Beispielsweise war dies bei den Berechnung von Schockwellen der Fall. Diese Wartezeit stellte den Ausgangspunkt für ein weiteres Forschungsgebiet dar, den zellulären Automaten. Der Kontakt mit Biomedizinern war sicher förderlich für die Überlegungen, mehr „biologische“ Funktionen in den Computer zu integrieren. Die Selbstorganisation und Selbstreproduktion von Einheiten waren seine Ziele. Von Neumann dachte über Automaten nach, die aus vielen mechanischen Zellen zusammengesetzt sind. Für einige stellt dieser Teil seiner Arbeiten seine größte unvollendete Arbeit dar ([Macrae] S. 280).

8 Princeton

Es ist auffällig, dass sich Gödel, Turing und von Neumann gerade in Princeton trafen. Von anderen wichtigen Persönlichkeiten, wie beispielsweise Einstein ist ebenso bekannt, dass sie dorthin auswanderten. Grund genug einen Blick auf den Ursprung dieses Treffpunktes zu richten.
1892 eröffnete Louis Bamberger mit 38 Jahren ein Textilgeschäft in Newark, New Jersey (Angaben aus [Macrae] S. 145ff) - heute am dritten New Yorker Flughafen gelegen. Das Geschäft florierte und im Jahre 1929 war es das viertgrößte Einzelhandelsgeschäft in den ganzen Vereinigten Staaten. Zu seinem 75. Geburtstag verkaufte es Bamberg. Dies geschah wohl zum optimalen Zeitpunkt, den sechs Wochen nachdem das Ehepaar den Erlös von rund 25 Millionen Dollar auf der Bank deponiert hatte, leutete der Schwarze Freitag den Zusammenbruch des Börsenmarktes ein.
Da Bamberg und seine Frau keine Kinder hatten und mehr Geld besaßen, als sie zum Le-

ben brauchten, wollten sie einen Teil des Vermögens wieder den Menschen in New Jersey zu Gute kommen lassen. Da sie selbst Juden waren, dachten sie zunächst an eine medizinische Hochschule, insbesondere für jüdische Ärzte, da diese in zunehmendem Maße diskriminiert wurden. Dr. Abraham Flexner war 1929 der Anlaufpunkt für die Neugründung einer medizinischen Hochschule. Er fertigte bereits 1910 eine vernichtende Studie über die medizinischen Hochschulen in den Vereinigten Staaten und Kanada an. Darin kam er zu dem Schluss, dass 120 der 155 untersuchten Hochschulen sofort geschlossen werden sollten und der Rest zumindest einer Umstrukturierung bedurften. Die berechtigte Kritik brachte ihm schnell den Ruf ein, Experte für den Aufbau medizinischer und wissenschaftlicher Institutionen zu sein.

Flexner riet dringend ab zwischen den Farbfabriken von New Jersey eine medizinische Hochschule zu gründen, da es weder eine angeschlossene Universität, noch ein gutes Hospital gab. Im nahen New York war dagegen beides vorhanden. Außerdem sah er für den Ruf einer Hochschule keine Chance, sobald eine diskriminierte Gruppe an einem Ort bevorzugt werden sollte. Doch er machte einen anderen Vorschlag, den er ohnehin im ersten Kapitel seines Buches *„Die Idee einer Universität“* ausfeilte. Bambergs sollten mit dem Geld etwas aufbauen, was später dann zum Institute for Advanced Study (IAS) in Princeton, New Jersey wurde. Zusammen mit dem Mathematikprofessor von Princeton, Oswald Veblen (1880-1960) betrieb er den Start des Instituts für Oktober 1933 mit vier bis fünf außerordentlich gut bezahlten Professorenstellen. Jedem, der es hören wollte, erzählte Veblen, dass die Mathematikprofessoren zu viele administrative Aufgaben hätten. Er erkannte, dass sich die Mathematik in Europa in einer mündlich tradierten Kultur der Kaffeehäuser und Kolloquien hervorragend entwickelt hatte. Er befürchtete, dass Amerika von dieser Entwicklung abgeschnitten würde. Die amerikanischen Professoren mussten seiner Meinung nach zu viel Unterricht für unterdurchschnittliche Studenten halten. Sein Vorbild war Göttingen und mit hohen Universitätsgehältern wollte er einige Europäer in die USA locken. Außerdem sollten Kolloquien nach europäischem Vorbild eingeführt werden. Die Professoren blieben von Oktober bis in den Frühling jeden Jahres am Institut, im Sommer konnten sie dafür anderswo lehren und leben. Von Routineverpflichtungen sollten sie befreit werden. Auch waren keine Labors geplant, vielmehr sollte Ihnen viel Zeit zum Nachdenken gegeben werden.

Flexner schaffte es, Einstein, den bekanntesten Wissenschaftler der Welt, der auch Jude war, mit dem Versprechen nach Princeton zu holen, fünf Monate im Jahr einfach nur dasitzen und nachdenken zu können. Mit den hohen Gehältern von 10.000 bis 16.000 Dollar pro Jahr startete das IAS mit den Berufungen von Veblen selbst, Einstein, Hermann Weyl, James Alexander und John von Neumann.

Das IAS wurde bald zur Zwischenstation für europäische Wissenschaftler, die auf der Flucht vor den Nazis einen neuen Wirkungskreis suchten. Gerade die berühmten Parties der von Neumanns wurden dabei zum Ort für einige der besten wissenschaftlichen Diskussionen. Es war außerdem ein Treffpunkt, wo berühmte Gelehrte neue Arbeitgeber kennen lernen konnten.

Es gab aber nicht nur Licht in Princeton. Die fehlende Verwaltungsarbeit und Lehrverpflichtung verschaffte den Geistesgrößen ein Vakuum, das sie nicht automatisch mit brillianten Ideen füllen konnten. Feynman lehnte deshalb in den 50er Jahren eine Professur am IAS ab ([Macrae] S. 156):

> „Als ich in den 40er Jahren in Princeton war, konnte ich sehen, was mit den großen Geistern am IAS passierte, die speziell wegen ihrer ungeheuren Gehirne ausgewählt worden waren und denen man nun Gelegenheit gab in diesem schönen Haus da am Wald zu sitzen, ohne unterrichten zu müssen, ohne irgendwelche Verpflich-

> tungen. Diese armen Kerle konnten jetzt sitzen und ganz ungestört nachdenken, ok? Und dann fällt ihnen eine Zeitlang nichts ein. Sie haben jede Gelegenheit, ewas zu tun, und es fällt ihnen nichts ein. Ich glaube in solch einer Situation beschleicht einen ein Schuldgefühl oder eine Depression, und man fängt an, sich Sorgen zu machen, weil einem nichts einfällt. Und nichts tut sich. Und es kommem immer noch keine Einfälle.
>
> ...
>
> Ich finde Unterricht und Studenten halten das Leben in Bewegung, und ich würde niemals irgendeine Position akzeptieren, bei der mir jemand das Glück verschafft hat, nicht unterrichten zu müssen. Niemals.“

Die Erwartungen, die zu Beginn an das IAS gerichtet waren, wurden also nicht unbedingt erfüllt. Zu den drei wichtigsten Entdeckungen, die dem IAS bis zu seinem 60. Geburtstag zugerechnet werden, zählen Gödels Lösung des Kontinuum-Problems, der Nobelpreis 1957 an die chinesischen Physiker Chen Ning Yang und Tsung-Dao Lee für den Nachweis der Paritätsverletzung und die Arbeit John von Neumanns.
Die Motivationen für Gödel, Turing und von Neumann nach Princeton zu reisen, waren sehr unterschiedlich. Gödel sah in den Einladungen einerseits eine Bestätigung seiner Leistung, doch bis sich seine Arbeitsbedingungen dramatisch verschlechterten, wollte er seine Wahlheimat Österreich nicht verlassen. Erst danach wurde Princeton für ihn zu einer Zufluchtsstätte.
Von Neumann verband mit Princeton den Reiz des Neuen und die hohen Gehälter lockten zusätzlich. Doch in den 50er Jahren hatte auch er schon Pläne gefasst, an eine Universität zu wechseln, deren Umgebung für ihn eher inspirierend sein sollte.
Turing ging nur nach Princeton, um dort mit Church und Gödel zusammenzuarbeiten, doch die Freiheit, wie er sie in Cambridge mochte, konnte er dort nicht finden.
Das „Phänomen Princeton“ konnte also nur durch die politischen Entwicklungen in Deutschland und Mitteleuropa entstehen. Die ursprüngliche Idee Veblens war nicht nachahmenswert für die wissenschaftlichen Institutionen der Welt. Einstein und Gödel wären gerne im deutschsprachigen Raum geblieben (siehe 3.1), doch ein wissenschaftliches Arbeiten war unter der nationalsozialistischen Regierung nicht möglich. Viele Wissenschaftler konnten den Nachstellungen nur durch Auswanderung und Flucht enkommen, viele weniger bekannte Mitarbeiter kamen aber auch in Lager und wurden getöten.

9 John Backus

1924 wurde John Backus als Sohn eines durch das Wirtschaftswachstum nach dem ersten Weltkrieg reich gewordenen Aktienbrokers in Philadelphia geboren. Seine Jugend verbrachte er Wilmington, Delaware, und Posttstown (Pennsylvania) (Angaben aus [Shasha]). Nach seinem High School Abschluss 1942 fing er an Chemie zu studieren, tat dies aber mit wenig Begeisterung. 1943 wurde er von der Armee eingezogen und nach einem Fähigkeitstest zu einem Ausbildungsprogramm an die Universität nach Pittsburgh geschickt. Als Teil des Programms arbeitete er in einer Spezialabteilung für Kopfverletzungen in einem Krankenhaus. Dabei wurde bei ihm ein Knochentumor entdeckt und im Rahmen der Behandlung eine Metallplatte in seinen Kopf eingesetzt. Nach dem Krieg wusste er nicht viel mit seinen Fähigkeiten anzufangen und ging zeitweise in eine New Yorker Schule für Radiotechniker, ehe er einige Mathematikkurse an der Universität belegte. Im Frühjahr 1949 besuchte der 25-jährige Backus das IBM Computer Center in der Madison Avenue und sah dabei erstmals den SSEC (Seite 33). Dieser interessierte ihn so sehr, dass er sich

danach bei dem Direktor bewarb und tatsächlich für die Arbeit am SSEC eingestellt wurde. Da dem SSEC noch der Speicher für seine eigenen Programme fehlte, mussten diese mittels Lochkarten eingelesen werden. Außerdem war er durch elektromechanische Teile noch sehr störungsanfällig. Drei Jahre arbeitete Backus mit der SSEC, unter anderem an der Berechnung der Mondpositionen für jeden Zeitpunkt. Da IBM den größten Teil seines erfolgreichen Geschäftes durch die Produktion von Lochkartenmaschinen erwirtschaftete, konnten sie es sich leisten, den SSEC für Öffentlichkeitsarbeit und Projekte mit der Universtität zu unterhalten. Backus lernte dabei sehr viel; auch über das Rechnen mit sehr großen Zahlen.
Von Neumann schlug vor, für sehr kleine und sehr große Zahlen mit Skalierungsfaktoren aus der wissenschaftlichen Notation großer Zahlen zu arbeiten. Dabei wurde statt $517000 = 517 \cdot 10^3$ nur 517 und der Exponent 3 gespeichert. Bei der Planung von Berechnungen sah von Neumann es als selbstverständlich an, dass die Programmierer die Größenordnungen mit den Skalierungsfaktoren abschätzen konnten. Für einen genialen Mathematiker war das auch kein Problem. Für einen Programmierer wie Backus, sah das anders aus ([Shasha] S. 10):

> „You had to know so much about the problem - it had all these scale factors - you had to keep the numbers form overflowing or setting big round off errors. So programming was very complicated because of the nature of the maschine.“

Backus schrieb ein Programm zur Unterstützung der Programmierer im Umgang mit Fließkommazahlen. Am Anfang der Arbeit mit Computern war die Hardware der größte Kostenfaktor, doch mit der Möglichkeit eine Maschine umzuprogrammieren, wurde die Programmierung aufwändiger und damit auch kostenträchtiger. Assembler war nur einen Schritt von dem 0-1 Maschinencode entfernt. Das machte die Programmierung sehr schwer und die Fehlersuche zu einer frustrierenden Detailarbeit. Das eigentliche Ziel des Programms konnte schnell dabei verloren gehen.
Für die IBM 704 schlug Backus im Dezember 1953 die Entwicklung einer Programmiersprache vor. Das Projekt wurde unter dem Namen Formula Translation (*Fortran*) bekannt. Von Neumann war zu dieser Zeit Berater von IBM, konnte aber die Probleme von Backus nicht nachvollziehen. Er hielt alle dahingehenden Bemühungen für Zeitverschwendung. Doch das Projekt wurde nicht revidiert. Das Entwerfen der Sprache war kein Problem, doch die Übersetzung in Maschinensprache, also das Entwickeln eines Compilers, wurde zu einer echten Herausforderung. Besonders die Strukturerkennung, die vom Parser erledigt werden soll, machte Probleme. Der Parser zerlegt den Programmtext in Einzelteile, die dann in Maschinencode übersetzt werden. Dieser Maschinencode besteht aus Befehlen, die spezifisch auf die Schaltkreise des Computers zugeschnitten sind. Besonders der geringe Speicherplatz machte ihnen dabei zu schaffen. Die DO-Schleife von Fortran machte die größten Schwierigkeiten. Dafür benötigte man eine spezielle Art von Register, die Index-Register, von denen auf der IBM 704 nur drei vorhanden waren. Über allem schwebte dabei die Gewissheit, dass die Programmierer Fortran nur verwenden würden, wenn der Code mindestens so effektiv wurde, wie das, was die Programmierer per Hand schreiben konnten. Deshalb verwendete das Team die Hälfte ihrer Arbeitszeit darauf, den Code so effektiv wie möglich zu machen. Im April 1957 wurde Fortran an den ersten IBM-Kunden ausgeliefert. Doch in den nächsten sechs Monaten mussten noch einige Fehler ausgebessert werden. Backus beendete schließlich seine Mitarbeit an Fortran Ende der 50er Jahre.
Im May 1958 wurde auf einem Treffen prominenter Computerfachleute Fortran weiter verbessert und der Beschluss gefasst eine neue standardisierte Programmiersprache, die *International Algebraic Language*, später kurz Algol genannt, zu entwickeln. Diese hatte

zwei bedeutende Vorteile gegenüber Fortran. Einerseits sollte sie die Einschränkung von nur globalen Variablen abschaffen, indem sie auch lokale Variablen zulies. Häufig traten nämlich Namenskonflikte auf, da Variablennamen doppelt verwendet wurden. Dies war die Voraussetzung einer neuen Programmierform, der Rekursion, die von John McCarthy kürzlich eingeführt wurde. Dieser zweite Vorteil erlaubte den Programmierern ein Problem in kleinere Teile zu zerlegen, die sich selbst wieder aufrufen. Vom theoretischen Standpunkt aus, waren lokale Variablen und Rekursion keine Erweiterungen, die Algol mächtiger als Fortran machten, doch sie schlossen das Tor zu neuen Algorithemen auf. Erst damit waren bestimmte Techniken wie beispielsweise die Tiefensuche praktisch umsetzbar.
Backus war von diesen Verbesserungen sehr angetan, bemängelte jedoch die Schwierigkeit diese Ideen klar auszudrücken (Zitat aus [Shasha] S. 16):

> „They would just describe stuff in English. Here's this statement - and here's an example. You were hassled in these Algol committees [with unproductive debates over terminoloy] enough to realize that somthing needed to be done. You needed to learn how to be precise."

Aus diesem Grund nutzte Backus einen Formalismus, der von Noam Chomsky (Abschnitt 10.2) entdeckt wurde: die kontextfreie Sprache. Chomskys Arbeit wurde durch Emil Posts (Abschnitt 5) theoretischer Vorarbeit mit Grammatiken inspiriert. Später wurde Backus' Darstellung als Backus-Naur-Form (BNF) bekannt (eine ausführlichere Darstellung findet sich in [Schöning] oder [Hedtstück]). Der Grund dafür lag in einem UNESCO-Treffen in Paris 1959. Dort las der dänische Mathematiker Peter Naur die Zusammenfassung seiner Darstellung. Er verbesserte Backus Schreibweise und benutzte sie, um Algol zu beschreiben. Als Algol sich verbreitete, war Naurs Veröffentlichung die beste Referenz, um die Syntax zu beschreiben. Folgte man den Regel der BNF, erhielt man ein syntaktisch korrektes Programm, dass der Compiler erfolgreich in den Maschinencode übersetzen konnte. Die Bedeutung der Hochsprache wurde in Maschinensprache abgebildet. Natürlich konnte das Originalprogramm noch Fehler enthalten, denn Compiler garantierten nur die korrekte Übersetzung, nicht dass das Originalprogramm fehlerfrei arbeitet. Dafür kann es nach den Erkenntnissen beim Entscheidungsproblem (siehe Seite 20) kein Computerprogramm geben.
Backus war nicht nur zufrieden mit seinem Ergebnis. Seines Erachtens war ein lauffähiges Fortranprogramm zu weit vom menschlichen Denken entfernt. Das Ziel seiner weiteren Arbeit lag darin, Programmierern die Möglichkeit zu geben, festzulegen, *was* berechnet werden soll, und sich nicht mehr um das *Wie* zu kümmern. 1977 stellte er sein Konzept mit dem Titel *„Can Programming Be Liberated from the von Neumann Style?"* vor. Auf LISP (siehe Seite 26) und APL aufbauend versuchte er, eine funktionale Programmiersprache (FP) zu entwickeln. Da eine effektive Compilierung von funktionalen Programmiersprachen sehr schwer ist, sind sie nicht sehr verbreitet. Seit 1991 hat sich Backus von allen Computerwissenschaften zurückgezogen und widmet sich vornehmlich der Meditation.

10 Noam Chomsky

10.1 Biographie

Avram Noam Chomsky wurde am 7. Dezember 1928 in Philadelphia geboren (Angaben aus [Gottwald] und [Lyons]). Sein Vater arbeitete als Hebraist am Gratzer College und von ihm lernte er die Grundbegriffe der historischen Sprachwissenschaften. Zur Schule ging

Noam an der Oak Lane Country Day School und anschließend der Central High School. Er studierte Linguistik, Mathematik und Philosophie an der Universität von Pennsylvania in Philadelphia. Seine Interessen lagen insbesondere bei den Grundlagen der Mathematik und der Logik. Sein Lehrer Zellig S. Harris erwähnte die Mitarbeit des Studenten Chomsky bei verschiedenen Projekten.
Von 1951 bis 1955 war Chomsky Junior Fellow in Harvard, wo er seine Dissertation „Transformational Analysis“ über Transformationsgrammatiken schrieb. Seit 1955 lehrte Chomsky am Massachusetts Institute of Technology (MIT) und seit 1961 war er als „Full Professor“ auf dem Ferrari-P.-Ward-Lehrstuhl für moderne Sprachen und Sprachwissenschaften tätig. Seine Arbeiten haben in weiten akademischen Kreisen Zustimmung gefunden, so dass er einige Ehrendoktorwürden erhielt.
Die ersten Artikelveröffentlichungen finden sich jedoch nicht in linguistischen Fachzeitschriften, sondern in Journalen der Nachrichtentechnik, wie „Transactions of Information Theory“ oder „Information and Control“. Erst später kamen die Ideen Chomskys zurück in die Linguistik. Um so erstaunlicher ist die Tatsache, dass das meiste der Theorie der Syntax natürlicher Sprache im Zusammenhang und der Auseinandersetzung mit Chomsky entstand.
Insbesondere die Konstruktion der generativen Grammatik machten ihn bekannt. Sie entsprang seinem Interesse für moderne Logik und den Grundlagen der Mathematik. Chomsky erklärte selbst, dass in Wirklichkeit seine Sympathie mit den politischen Ansichten von Harris dazu geführt hat, sich mit Linguistik zu beschäftigen ([Lyons] S. 147).
Seit der zweiten Hälfte der sechziger Jahre engagiert sich Chomsky auch politisch. Seine Ansichten neigten eher dem Sozialismus oder Anarchismus zu ([Lyons] S. 147). In zahlreichen Veröffentlichungen äußerte er sich zu vielen Gebieten der amerikanischen Politik sehr kritisch, besonders im Bereich der Außenpolitik (vom Vietnamkrieg bis zum letzen Golfkrieg). Dadurch wurde er auch außerhalb des Sprachwissenschaften bekannt.

10.2 Die Chomsky-Hierarchie

Die Linguistik, mit einem ihrer bekanntesten Vertreter Noam Chomsky, ist die Wissenschaft von der Sprache. Wissenschaft bedeutet dabei, dass sie sytematisch auf der Grundlage objektiv nachprüfbarer Beobachtung und im Rahmen einer allgemeinen Theorie durchgeführt wird. Die moderne Sprachwissenschaft steht im Gegensatz zu der traditionellen Sprachbetrachtung. Besonders deutlich wird dies, indem sie bewusst ihre Autonomie gegenüber anderen Disziplinen, wie Philosophie und Literaturtheorie einerseits und der kulturellen Entwicklung andererseits betont. Die traditionelle Sprachbetrachtung richtete vornehmlich ihre Aufmerksamkeit auf das geschriebene Wort. Die meisten Linguisten heute sehen dagegen in der gesprochenen Sprache das Primäre. Da einige Sprachen nicht über eine Schrift verfügen oder diese erst in jüngster Zeit erhalten haben, und da Kinder auch zuerst das Sprechen und später erst das Schreiben der gesprochenen Sprache lernen, scheint dieser Ansatz gerechtfertigt. Damit rückten auch die Dialekte wieder mehr in das Blickfeld des Interesses und diesen Gedanken weiter verfolgend kann auch nicht mehr zwischen „zivilisierten“ und „primitiven“ Sprachen unterschieden werden. Zwar gibt es Unterschiede im Umfang des Wortschatzes, doch die „Systematik“ der Sprache ist weder rückständiger noch höher entwickelt.
Was sind die Kennzeichen menschlicher Sprache? Zwei Eigenschaften stechen besonders hervor: Erstens die zweifache Gliederung der Sprache, mit der (primären) syntaktischen Ebene und der (sekundären) phonologischen Ebene. Die Einheiten der primären Ebene sind die Wörter, während die zweite Ebene aus den Lauten besteht. Die Beschreibung

oder Grammatik einer Sprache besteht aus drei zusammenhängenden Teilen ([Lyons] S. 26ff):

- der Syntax, die die Regelmäßigkeit der Wortkombinationen erfasst („Er kam aus Hamburg“ ist grammatisch richtig, aber nicht „Kam aus er Hamburg“),
- der Semantik, welche die Bedeutung der Wörter und Sätze beschreibt („Das weiße Pferd steht vor dem roten Haus“ ist semantisch korrekt, aber „Das rote Pferd fliegt unter dem Haus hinweg“ist semantisch falsch) und
- der Phonologie, die die Laute und ihre möglichen Kombinationen beschreibt („kam“ ist ein mögliches deutsches Wort, „kma“ aber nicht).

Neben der Gliederung der Sprache ist die zweite Eigenschaft die Kreativität, oder „Offenheit“, der Sprache. Damit wird die Tatsache beschrieben, dass alle Sprecher unbegrenzt viele Sätze erzeugen und verstehen können, selbst wenn sie diese nie zuvor gehört haben oder diese auch von keinen Menschen zuvor gesagt wurden.
Besonders die amerikanischen Sprachwissenschaften wurde im 20. Jahrhundert von der Beschreibung verschiedener Sprachen geprägt. Da die Zahl der Indianer, die ihre eigene Sprache noch beherrschten, immer weiter abnahm, wollte man diese Sprachen so schnell wie möglich aufzeichnen und beschreiben, bevor sie für die Erforschung verloren gingen. Dazu suchte man nach Techniken zur Beschreibung nicht aufgezeichneter Sprachen. In Harris Werk *„Methods in Structural Linguistics“* gipfelte diese Beschreibung in Prinzipien phonologischer und syntaktischer Analyse, ohne Bezug auf deren Bedeutung.
In seinen jungen Jahren glichen die Ansichten Chomskys über Sprachtheorie in vielen Bereichen denen seiner Wegbereiter, namentliche Harris und Leonard Bloomfield (1887-1949). Doch auch schon in seiner wichtigen Veröffentlichung *„Syntactic Structures“* von 1957 stellt er zwei Unterschiede heraus. Einerseits betont er stärker die Kreativität (oder „Offenheit“) der Sprache, andererseits unterstrich er die Intuition des Sprechers. Aus beiden Punkten heraus beurteilte er das unerreichte Ziel, Entdeckungs- oder Auffindungsverfahren zu finden, als zu ehrgeizig. Zunehmend stellte er sich gegen die behavioristischen Theorien des Spracherwerbs mit ihren Erklärungsmustern von Imitation und Verstärkung. Vielmehr verglich er die Situation mit den Beweisen in der Mathematik: So wie ein Beweis eines mathematischen Satzes nachgeprüft werden kann, ohne dass man den Weg des Entdeckers berücksichtigt, so muss dies auch für die grammatische Analyse gelten. Er beschränkt sich auf die Suche nach einer Bewertungsprozedur mit Kriterien für die Wahl zwischen verschiedenen Grammatiken.
“Sinnlose“ Sätze, wie *„Blaue farblose Vorstellungen laufen aufgeregt umher“*, zeigten für ihn, dass unabhängig von der Bedeutung eines Satzes, Menschen trotzdem die Grammatikalität eines Satzes überprüfen können. Er stellte deshalb eine Autonomie der Syntax fest und plädierte für eine Konzentration der Linguistik auf die Syntaxt, unter Vernachlässigung semantischer Aspekte. Nicht die tatsächlich im Alltag fehlerhaften Äußerungen sollten im Vordergrund stehen, sondern die Sprachkompetenz eines perfekten und idealen Sprech-Hörers.
In seinem Buch *„Syntactic Structures“* spricht Chomsky von der Grammatik als „einen Mechanismus oder einer Vorrichtung irgendeiner Art zur Hervorbringung der Sätze der unterschiedlichen Sprachen.“ Dabei wurde mit dem Begriff des Hervorbringens häufig die Sichtweise des Sprechers impliziert, doch davor warnte Chomsky immer wieder. Seiner Ansicht nach ist eine Grammatik bezüglich Spracherkennung oder -hervorbringung neutral. Der typischerweise von ihm verwendete Begriff ist „generieren“. Einerseits bringt eine „generative“ Grammatik aus einer gegebenen Anzahl von Sätzen eine „Projektion“

auf eine viel größere, möglicherweise unbegrenzte Anzahl von Sätzen der ganzen Sprache. Dies spiegelt den schöpferisch, offenen Aspekt der menschlichen Sprache wieder. Chomsky verstand andererseits „generativ“ auch als „explizit“, das heißt, dass die Regeln und die Bedingungen ihrer Anwendungen explizit angegeben werden müssen. Darin sah Chomsky eine Verbindung zu den Regeln der Arithmetik in der Mathematik. Die Grammatik einer Sprache sollte „alle und nur die“ Sätze der Sprache generieren. Das heißt, einerseits, dass die Grammatik umfassend genug sein muss, alle Sätze zu erzeugen, aber andererseits nicht zuviel erzeugen darf. Beispielsweise könnte eine extrem einfache Grammatik der deutschen Sprache jede Kombination deutscher Worte generieren. Damit kann man zwar alle Sätze der deutschen Sprache erzeugen, aber der größte Teil dieser Kombinationen wären keine Sätze und unsinnig.

Die Begriffsdefinitionen innerhalb der Linguistik weichen von denen der Theoretischen Informatik ab. Eine „Sprache“ besteht in der Linguistik aus der Menge aller Sätze, die durch die Grammatik aus einzelnen Worten generiert werden können. Die Grammatik soll aus einer endlichen Menge von Regeln bestehen, der Wortschatz einer Sprache soll ebenfalls endlich groß sein, aber es soll eine unendlich große Menge an Sätzen erzeugt werden können. Deshalb müssen einige Regeln bei der Erzeugung mehrfach angewendet werden. Diese Regeln und die erzeugten Strukturen werden „rekursiv“ genannt.

Die Wichtigkeit deduktiver und formaler Methoden stellte Chomsky mehrfach heraus. Dabei entwickelte er eine Hierarchie der generativen Mächtigkeit formaler Grammatiken, abhängig von bestimmten Einschränkungen ihrer Regeln.

Die einfachsten von Chomsky diskutierten Grammatiken sind die von ihm so bezeichneten „Grammatiken mit endlich vielen Zuständen“ (finite state grammars), die von der Annahme ausgehen, dass Sätze durch eine Serie von Entscheidungen, die von links nach rechts getroffen werden, generiert werden. Man kann sich eine solche Grammatik wie eine Maschine vorstellen, die eine endliche Zahl innerer Zustände durchläuft, wenn sie vom Ausgangszustand in einen Endzustand übergeht. Die Sätze sind in ihrem Aufbau recht einfach, auch wenn sie rekursive Strukturen erlauben. Chomsky hat allerdings in seinem oben zitierten Buch gezeigt, dass es in der Englischen Sprache Prozesse der Satzbildung gibt, die nicht durch eine Grammatik diesen Typs erfasst werden. Seine Argumentation (siehe [Shasha] S. 73) basierte auf den „if-then“ Sätzen (deutsch: Wenn - dann). Jede Grammatik, die die englische Grammatik beschreiben will, muss diese Sätze erkennen können. Auch verschachtelte Strukturen, beispielsweise „if if if then then then“ müssen verarbeitbar sein. Wie Chomsky zeigte, können Grammatiken mit endlich vielen Zuständen dieses nicht leisten. Dass dieser Typ von Grammatik überhaupt seine Aufmerksam bekam, lag an der Suche nach effizienten Verfahren zur Nachrichtenübermittlung während des Zweiten Weltkrieges. In dem Zusammenhang wurde dieser Sprachtyp detailliert untersucht.

Das nächste Modell zur Sprachbeschreibung war die Phrasen-Struktur-Grammatik. Alles was die Grammatik mit endlich vielen Zuständen generieren konnte, kann dieser Grammatiktyp auch, aber noch bedeutend mehr. Die Sätze werden in ihre Bestandteile zerlegt (beispielsweise Subjekt-Prädikat-Objekt) und diese werden genauer untersucht (z.B. Objekt setzt sich zusammen aus einem Prädikat und einem Nomen). Dieses Vorgehen hat ihr Pendant in der Klammersetzung der Mathematik. Mittels eines Baumdiagramms kann dieses Vorgehen visualisiert werden. Chosmky konnte nicht beweisen, dass es im Englischen Sätze gibt, die nicht mit diesem Grammatiktyp generierbar sind[34], aber er sagte, dass einige Sätze nur sehr umständlich zu generieren sind. Damit kommt implizit zum Ausdruck, dass, sobald es mehrere gleichwertige Grammatiken gibt, die einfachere vorzuziehen ist.

[34]In anderen Sprachen existieren Konstruktionen, die außerhalb der Möglichkeiten der Phrasen-Struktur-Grammatik liegen, z. B. in Mahawk ([Lyons] S. 77).

Das dritte Grammatikmodell, die generative Transformationsgrammatik, zieht er deshalb vor, weil in diesem Modell einfachere Konstruktionen möglich sind. Mehrdeutigkeiten von Sätzen, wie „Flying planes can be dangerous“, in unterschiedliche Strukturbeschreibungen aufzulösen, geht zwar auch mit reinen Phrasenstrukturgrammatiken. Jedoch erzeugen die zahlreichen Regeln, beispielsweise zur Auflösungen von Genus und Numerus, eine erhebliche Redundanz. Die Transformationsgrammatik unterscheidet hierbei zwischen einer vergleichsweise einfachen Basiskomponente mit einer Tiefenstruktur und der daraus durch Transformationsregeln erzeugten Oberflächenstruktur.
Weiter kann auf die Transformationsgrammatik in diesem Rahmen nicht eingegangen werden, da sie einerseits weitaus komplizierter ist als die Phrasen-Struktur-Grammatik, und andererseits für die Theoretische Informatik keinen Beitrag lieferte.
Innerhalb der Phrasen-Struktur-Grammatik sind kontextfreie von kontextsensitive Regeln zu trennen. Chomsky zeigte insbesondere, dass kontextsensitive Grammatiken prinzipiell mächtiger sind, als kontextfreie. Die Grundlage der Phrasen-Struktur-Grammatik stammt dabei nicht von Chomsky selbst, sondern von seinen Vorgängern. Er hat sie jedoch als Vorarbeit für seine Transformationsgrammatik präzisiert und formalisiert. Aus der Beschreibung der Grammatikmodelle für die menschliche Sprache sind die Parallelen zu den Kunstsprachen der Informatik, wie sie beispielsweise in [Schöning] dargestellt sind, schnell ersichtlich.
Chomskys sah im menschlichen Geist ein „festgelegtes biologisches System mit intrinsischer Reichweite und Beschränkung“. Damit stand für ihn die Verbindung zur Biologie sehr nahe. Durch weitreichende Idealisierungen und abstrakte Modelle wollte er in der Linguistik die biologisch notwendigen Eigenschaften der menschlichen Sprache zusammenfassen. Auf diese *Universalgrammatik*, die allen Sprachen zugrunde liegen soll, kann hier nur abschließend hingewiesen werden.

11 Michael Rabin

Michael Rabin wurde in Breslau 1931 als Sohn eines Rabbis geboren (Angaben aus [Shasha]). Sein Vater lehrte Jüdische Geschichte und Philosophie am Theologischen Seminar, seine Mutter schrieb Kindergeschichten und hatte einen Doktortitel in Literatur. Als sich die politische Lage in Deutschland zuspitzte, gingen sie 1935 nach Haifa in Palästina, das damals noch ein britisches Protektorat war. In einer religiösen Grundschule entdeckte Michael sein Interesse an der Mathematik und, gegen die Hoffnungen seines Vaters, ging er anschließend auf ein naturwissenschaftliches Gymnasium. Er begann sein Mathematikstudium Anfang der 50er Jahre, gerade zu der Zeit als die ersten Artikel über Computer in Israel veröffentlicht wurden. Da Rabin sich für Computer interessierte und es in Israel zu der Zeit keine gab, wechselte er nach Amerika. Zunächst ging er nach Pennsylvania, dann nach Princeton, um dort seinen Doktortitel in Logik bei Alonzo Church (Abschnitt 6) zu machen. Das Thema seiner Doktorarbeit war die Berechenbarkeit algebraischer Gruppen. Er zeigte, dass viele der Probleme aus dem Bereich der Gruppentheorie nicht durch Computer berechenbar sind.
1957, gerade als er seine Doktorarbeit schrieb, wurde ihm und Dana Scott, einem anderen Studenten, Sommerjobs von IBM Research angeboten. Kurioserweise ließ ihnen die Firma IBM freie Hand in der Wahl ihrer Beschäftigung und diese Freiheit nutzten die beiden, um eine neue Theorie in der Informatik zu entwickeln. Sie beschäftigten sich mit endlichen Automaten, die, gegenüber der Turingmaschine (siehe Abschnitt 4.2), nicht auf das Eingabe- bzw. Arbeitsband schreiben können. Dieser Automat wird sich bei einer

bestimmten Eingabe immer gleich reagieren. Sein Verhalten ist deterministisch. Chomsky hatte bereits 1957 gezeigt, dass Grammatiken mit endlich vielen Zuständen, und damit auch endliche Automaten, nicht mächtig genug sind, um die Grammatik der englischen Sprache zu erkennen (Seite 40).
Rabin und Scott entwickelten daraus einen „nichtdeterministischen“ Automaten. Zur Erklärung wählte Rabin den Vergleich mit einem französischen Restaurant (aus [Shasha] S. 74):

> „Consider a menu in a fancy French restaurant. There are a number of hors d'œvres, soups and fisch selections before the main course. Then a number of meat main courses and so on down the line. You are in the state for selecting a meal. In the first instance, you select the hors d'œvres, and then you select the soup, and so on. This is not a random process. We are not tossing a coin. But it is nondeterministic because you have choices as to the next state (i.e., menu item selction) that you move into.
> The choices are the states. Each of these sequences of choices represents a possible computation and results in either satisfaction or dissatisfaction with the meal. Acceptance or rejection.“

Die beiden Logiker definierten die Ausgabe „Akzeptiert“ bei ihrem nichtdeterministischen Automaten, sobald die Eingabe mindestens einen möglichen Weg in einen Endzustand zulässt. Um im Bild von Rabin zu bleiben: Wenn man ein nichtdeterministischer Besucher des Restaurants ist und es zumindest eine Menuekombination gibt, die dem Besucher schmeckt, wird der Besucher sagen, dass das Restaurant „gut“ ist. Gibt es keine solche schmackhafte Kombination, wird sein Urteil über das Restaurant „schlecht“ sein.
Rabin und Scott zeigten, dass jedes Problem, das mit einem nichtdeterministischen Automaten gelöst werden kann, auch mit einem deterministischen Automaten lösbar ist. Auch wenn es erheblich mehr Zustände erfordert und dadurch komplizierter wird. Sie gaben einen Algorithmus an, wie die beiden Maschinentypen ineinander konvertiert werden können (dargestellt beispielsweise in [Schöning] S. 32 oder [Shasha] S. 77).
Nichtdeterministische Automaten waren eine vorzügliche Art Buchstabenketten in Texten zu suchen, Zeichenketten bei der Übersetzung zu finden und auch in Textverarbeitungsprogrammen fanden sie Einzug. Rabin und Scott erarbeiteten sich dieses Modell sehr schnell.

> „That was a fabulous collaboration.... One of us would formulate a question and then we would go to our respective corners and the other one would come up with the solution. Maybe overnight. Within maybe three weeks we had all the answers, including many results that did not go into the paper because we didn't want to make it too long. These were later rediscovered by other people.“[35]

Ihre Ergebnisse wurden erst 1959 veröffentlicht. Die Idee der nichtdeterministischen Arbeitsweise wurde von anderen Theoretikern in den nächsten Jahren in vielfältiger Weise in anderen Zusammenhängen eingesetzt.

12 Resümee

Die Entwicklung der Theoretischen Informatik geschah nicht unabhängig von der technischen Entwicklung und der Mathematik. Die Mathematik kam auf der Suche nach einem sicheren Fundament ihrer Axiomatisierung an konkrete Probleme. Insbesondere die

[35] Aus [Shasha] S. 79.

Lösung des zweiten und des zehnten Hilbertschen Problems bildete den Ausgangspunkt für eine neue Wissenschaft. Gödel überraschte einerseits mit seinem Ergebnis, andererseits mit den Mitteln, die er anwendete. Dass die Beweisbarkeit der Mathematik Grenzen besitzt, erstaunte nicht nur die Mathematiker, sondern hatte auch Auswirkungen auf die Philosophie. Durch die primitiv-rekursiven Funktionen wurde noch vor Churchs λ-Kalkül das Augenmerk auf den Begriff der Berechenbarkeit gelenkt. Auch die Gödelisierung stellte eine neue Technik dar, die später in anderen Zusammenhängen eingesetzt wurde. Sie kann auf endliche Zeichenfolgen, insbesondere Programme und logische Aussagen, angewendet werden.
Alan Turing orientierte sich an Fragen, die aus dem zweiten Hilbertschen Problem erwuchsen. Die Turing-Maschine stellte dazu zunächst nur ein Hilfsmittel dar. Dieses Modell reduziert die Fähigkeiten jeder mechanischen und elektronischen Maschine auf ein Minimum und beschreibt doch vollständig, was mit ihnen überhaupt berechnet werden kann. Das Modell wurde vielfälltig aufgegriffen und entwickelte sich zum Standard in der Theoretischen Informatik. Dabei ist es interessant zu sehen, dass Post ebenfalls ein solches Modell unabhängig von Turing entworfen hatte. Dieses war jedoch stärker an der amerikanischen Arbeitswelt orientiert. Die Turing-Maschine lieferte als weiteres Berechenbarkeitsmodell die Vorlage für Churchs These. Durch sein λ-Kalkül, Gödels primitiv-rekursiven Funktionen (erweitert durch den μ-Operator) und die Turing-Maschine lagen drei äquivalente Berechenbarkeitsmodelle vor, die jeweils aus dem hervorgingen, was man intuitiv mit dem Begriff der Berechenbarkeit verband.
Von Neumann arbeitete an der Struktur der Maschinen, die dann die theoretisch möglichen Berechnungen auch durchführen sollten. Auch er war Mathematiker, suchte aber auch immer außerhalb der Mathematik nach Anwendungsmöglichkeiten mathematischer Techniken. Aus dem Wunsch, den Computer möglichst flexibel einsetzten zu können, entstand durch ihn und seine Arbeitsgruppe die von-Neumann-Architektur, nach dessen Grundprinzip auch die heutigen Computer noch funktioneren.
John Backus arbeitete bereits mit einem solchen Computer. Durch den Wunsch beseelt, den Programmieraufwand von technischen Details zu entkoppeln, entwarf er die erste höhere Programmiersprache Fortran. Bei der Weiterentwicklung griff er die Mittel auf, die Noam Chomsky in der Linguistik verfeinert hatte. Die exakte Beschreibung von höheren Programmiersprachen brachte die Backus-Naur-Form. Die Klassifizierung der Sprachen durch ihre Grammatiken in der Chomsky-Hierarchie ergab eine Struktur, welche die Mächtigkeit verschiedener Sprachklassen und zugehöriger Maschinenmodelle beschrieb, also das, was in ihnen ausgedrückt werden kann. Die Erkennung von regulären Sprachen kann durch Maschinen, sogenannte Automaten, erfolgen. Neben den einfachen endlichen Automaten entwickelte Micheal Rabin zusammen mit Dana Scott einen nichtdeterministischen Automaten. Dieser kann zwar nicht mehr als ein endlicher Automat, aber die Beschreibung bei einigen Vorgängen wird sehr vereinfacht.

Die Theoretische Informatik hat ihre Wurzeln in der Mathematik. Doch mit dem Wachsen der Möglichkeiten entwickelten sich theoretische Techniken, die nicht mehr im engeren Sinn mathematisch sind. Vielmehr verselbständigten sie sich und bilden das theoretische Fundament einer mittlerweile eigenständigen Wissenschaft, der Informatik.

Ganz ausdrücklich möchte ich dem Dipl.-Inform. Herrn Oliver Glier vom Fachgebiet Automatentheorie und Formale Sprachen des Fachbereichs Informatik der Technischen Universtität Darmstadt danken. Ohne die vielen Gespräche und Literaturhinweise von ihm wäre diese Arbeit kaum möglich gewesen.

Literatur

[Agar] Agar, Jon: *Turing and the Universal Machine*, Icon Books Ltd., 2001.

[Asteroth] Asteroth, Alexander; Baier, Christel: *Theoretische Informatik - Eine Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und formale Sprachen mit 101 Beispielen*, Pearson Studium, München, 2002.

[Barendregt] Barendregt, H.P.: *The Lambda Calculus*, North-Holland Publishing Company, Band 103, „Studies in Logic - and the Foundation of Mathematics“, North-Holland Publishing Company.

[Baumann93] Baumann, Rüdiger: *Informatik für die Sekundarstufe II - Band 2*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1993.

[Baumann96] Baumann, Rüdiger: *Didaktik der Informatik*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1996.

[Breier89] Breier, Norber: *Ein Plädoyer für die Registermaschine*, LOG IN 1 / 1989, S. 29 - 32, R. Oldenbourg Verlag.

[Breier90] Breier, Norber: *Grenzen des Computereinsatzes*, LOG IN 1 / 1990, S. 43 - 50 und 3 / 1990, S. 37 - 42, R. Oldenbourg Verlag.

[Breier91] Breier, Norber: *Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, LOG IN 3 / 1991, S. 29 - 35, R. Oldenbourg Verlag.

[Davis] Davis, Martin: *Why Gödel didn't have Church's thesis*, Information and Control, 54(1/2):3-24, July/August 1982.

[Dewdney] Dewdney, A.K.: *Der Turing Omnibus*, Springer Verlag, 1995.

[Enzensberger] Enzensberger, Hans Magnus: *Elixiere der Wissenschaft - Seitenblicke in Poesie und Prosa*, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 2002.

[Gottwald] Gottwald, Siefried; Ilgauds, Hans-Joachim; Schlote, Karl-Heinz: *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Bibliographisches Institut Leipzig, 1990, 1. Auflage.

[Gödel] Gödel, Kurt: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, Monatshefte für Mathematik und Physik 37, S. 173 - 198, 1931.

[Guerrerio] Guerrerio, Gianbruno: *Gödel, Logische Paradoxien und mathematische Wahrheit*, Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft Biografie 1/2002, Heidelberg.

[Harel] Harel, David: *Das Affenpuzzel und weitere bad news aus der Computerwelt*, Springer Verlag, Berlin, 2002.

[Hedtstück] Hedtstück, Ulrich: *Einführung in die Theoretische Informatik*, Oldenbourg Verlag, 2003, München, 2. Auflage.

[Hilbert] „Die Hilbertschen Probleme“ erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P.S. Alexandrov, Vortrag von David Hilbert: „Mathematische Probleme“, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 4. Auflage, 1998.

[Hodges] Hodges, Andrew: *Alan Turing, Enigma*, Verlag Kammerer & Unverzagt, Berlin, 1989.

[Hofstadter] Hofstadter, Douglas R.: *Gödel Escher Bach*, Deutscher Taschenbuchverlag, München, 9. Auflage, 2003.

[Kerner] Kerner, Immo O.: *Harte Nüsse - Die schwierigsten Probleme für den Computer*, LOG IN 3 / 1991, S. 9 - 17, R. Oldenbourg Verlag.

[Kordos] Kordos, Marek: *Streifzüge durch die Mathematikgeschichte*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1999.

[LS] Lambacher Schweizer: *Analysis - Leistungskurs Gesamtband*, Ausgabe A, Ernst Klett Verlag, 2001, Stuttgart, 1. Auflage.

[HKM] Hessisches Kultusministerium (Hrsg.): *Lehrplan Informatik, Gymnasialer Bildungsgang, Jahrgangsstufe 11 bis 13*, Wiesbaden, 2003.

[Lyons] Lyons, John: *Noam Chomsky*, Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1971.

[Macrae] Macrae, Norman: *John von Neumann: Mathematik und Computerforschung - Facetten eines Genies*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[Penrose] Penrose, Roger: *Computerdenken*, Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft, Heidelberg, 1991.

[Shasha] Shasha, Dennis; Lazere, Cathy: *Out of their minds: the lives and discoveries of 15 great computer scientists*, Springer Verlag, New York, 1995.

[Schöning] Schöning, Uwe: *Theoretische Informatik - kurzgefasst*, Spektrum Akademischer Verlag, 2001, 4. Auflage.

[Singh] Singh, Simon: *Geheime Botschaften*, Deutscher Taschenbuch Verlag, Heidelberg, 2001.

[Stegmüller] Stegmüller, Wolfgang: *Vollständigkeit und Unentscheidbarkeit*, Springer Verlag, 1973, 3. Auflage.

[Troitzsch] Troitzsch, Ulrich; Weber, Wolfhard: *Die Technik*, Unipart-Verlag, Braunschweig, 1987.

[Wegener] Wegener, Ingo: *Kompendium Theoretische Informatik - Eine Ideensammlung*, Teubner Verlag, Stuttgart, 1996.

[Ziegenbalg] Ziegenbalg, Jochen: *Algorithmen - Von Hammurapi bis Gödel*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.

Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Sämtliche Stellen, die den benutzten Werken im Wort oder dem Sinn nach entnommen sind, wurden mit Quellenangaben kenntlich gemacht.

Rodgau, im August 2003 .....

Thomas Wolf